Konvexe Analysis - Ein Beispiel

Entfernen von Bildrauschen & -störungen

Def. Bild $x :\Leftrightarrow x \in (C_c^1 \cap BV)(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_{\geq 0})$
bzw $x \in X$ Hilbertraum
und: $\Omega := \operatorname{supp} x$

Problem:

geb. gestörtes Bild x_0

ges. Ursprungbild x_*

Ansatz: $$x_* = \min_{x \in X} \underbrace{I(x)}_{\text{Regularisierer}} + \frac{1}{2\lambda} \underbrace{\|x - x_0\|^2}_{\text{Ähnlichkeitsterm}}$$

(ansonsten: $\min_{x \in X} I(x) = 0 \; ; A$)

I soll Glattheit der Lösung sicherstellen.

Möglichkeiten: (falls x diff'bar)

$I(x) = \int_\Omega \|\nabla x\|^2 dt$ (Squared Gradient)

oder $I(x) = \int_\Omega \|\nabla x\| dt$ (Totale Variation)

$\lambda = 0.25$ $\lambda = 0.5$ $\lambda = 1.0$

$\|\nabla x\|$

$\lambda = 2.5$ $\lambda = 5.0$ $\lambda = 10.0$

$\|\nabla x\|^2$

Die „richtige“ Def. der totalen Variation lautet

$$I_{TV}(x) = \sup\left\{ \int_\Omega x(t)\,\mathrm{div}\,\xi(t)\,dt : \xi \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^2),\ \|\xi\|_\infty \le 1 \right\}$$

Diese Def. ist äquivalent zu $I_{TV}(x) = \int_\Omega \|\nabla x\|\,dt$, wenn x diff'bar ist:

$$\int_\Omega x\,\mathrm{div}\,\xi\,dt = \underbrace{\int_{\partial\Omega} x\,\xi\cdot\nu_t\,dt}_{=0,\ \text{nach Def von } \Omega} - \int_\Omega \underbrace{\nabla x\cdot\xi}_{\overset{CS}{\le} \|\nabla x\|\underbrace{\|\xi\|}_{\le 1} \le \|\nabla x\|}\,dt$$

Gleichheit: $\nabla x \parallel \xi \qquad \|\xi\| = 1$

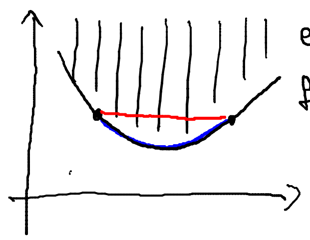
insgesamt: $\xi = -\dfrac{\nabla x}{\|\nabla x\|}$

Was hat das mit konvexer Analysis zu tun?

$I_{TV}(x) + \frac{1}{2\lambda}\|x - x_0\|^2$ ist konvex.

Def: Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ ist konvex gdw. epi f konvex ist.

$\text{epi } f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \ge y\}$



Satz: $f: X \to \mathbb{R}$ konvex
$\iff \forall a,b \in \mathrm{dom}\, f\ \forall \alpha,\beta \ge 0, \alpha+\beta = 1:$
$f(\alpha a + \beta b) \le \alpha f(a) + \beta f(b)$

Bew: $\Rightarrow$ $\forall a,b \in \mathrm{dom}\, f: [\binom{a}{f(a)}, \binom{b}{f(b)}] \subseteq \text{epi} f$ #

Satz: f, g konvexe Fkt $\Rightarrow$ f+g auch konvex

Bew: klar (Ungl. aufaddieren)

Satz: f_y Schar konvexer Funktionen, dann:
$f(x) := \sup_y f_y(x)$ ist konvex

Bew: $\forall a,b \in \mathrm{dom}\, f\ \forall \alpha,\beta \ge 0, \alpha+\beta = 1:$

$$f(\alpha a + \beta b) = \sup_y f_y(\alpha a + \beta b) \le \sup_y \alpha f_y(a) + \beta f_y(b)$$

$$\le \alpha \sup_y f(a) + \beta \sup_y f_y(b) = \alpha f(a) + \beta f(b) \quad \#$$

Fenchel Konjugiertes

f sei Fkt mit $\operatorname{dom} f \subseteq X$, X reflexiver Banachraum
dualem X^* und $\langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle = x^*(x)\ \forall x\in X, x^*\in X^*$

Def: Das Fenchel Konjugierte f^* an f ist:

$$f^*: X^* \to \mathbb{R},\ x^* \mapsto \sup_{x\in X} \langle x^*, x\rangle - f(x)$$

Satz: Zu beliebigem f ist f^* immer konvex.

Bew: $\underbrace{\langle x^*, x\rangle - f(x)}$ ist affine Fkt, also auch konvex
$\Rightarrow \sup\limits_{x\in X}$ ist auch konvex. #

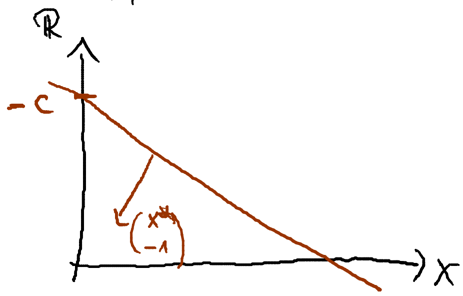
Satz: (Young-Ungl.) beliebig nahe wg. sup-Def!

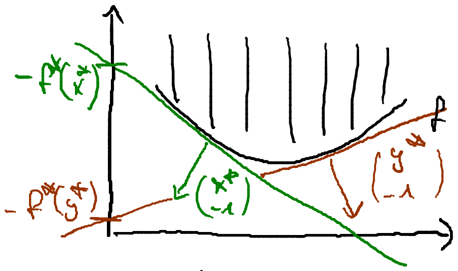
$$\langle x^*, x\rangle \leq f^*(x^*) + f(x) \quad \forall x\in X, x^*\in X^*$$

Bew: $\langle x^*, x\rangle - f(x) \leq \sup\limits_{p\in X} \langle x^*, p\rangle - f(p) = f^*(x^*)$

Intuition für f^*:

$$h_{x^*,c}(x) := \langle x^*, x\rangle - c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ h_{x^*,c}(x) \end{pmatrix} = c$$



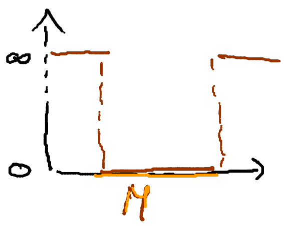


Young: $\underbrace{h_{x^*, f^*(x^*)}}(x) = \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) \leq f(x) \quad \forall x\in X$

Hyperebene mit Normale x^*, die an epi f anliegt.

Def: $M \subseteq X$, dann Indikatorfkt:

$$c_M(x) = \begin{cases} 0 : & x\in M \\ +\infty : & x\notin M \end{cases}$$



Anwendung:

$$c_K^*(x^*) = \sup_{x\in X} \langle x^*, x\rangle - c_K(x) = \sup_{x\in K} \langle x^*, x\rangle =: \underbrace{\sigma_K(x^*)}_{\text{Stützfunktion}}$$

Folgerung:

$$I_{TV}(x) = \sup_{x^*\in K = \{\operatorname{div} \xi :\, \xi\in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2),\, \|\xi\|_\infty \leq 1\}} \langle x^*, x\rangle = c_K^*(x) = \sigma_K(x)$$

Subdifferential

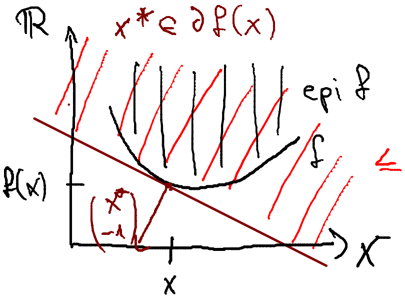
Def: $f: X \to \mathbb{R}$ (konvex), dann ist das Subdifferential:

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : \forall p \in X: f(p) \geq f(x) + \langle x^*, p-x \rangle\}$$

$$= \{x^* \in X^* : \forall p \in X: \underbrace{\langle x^*, x\rangle - f(x)} \geq \underbrace{\langle x^*, p\rangle - f(p)}\}$$

Intuition:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x^* \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ f(p) \end{pmatrix}$$



Also: $x^* \in \partial f(x) \Rightarrow \operatorname{epi} f \subseteq H^{\leq}_{x^*, \langle x^*, x\rangle - f(x)}$

$$H^{\leq}_{a^*, c} = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : \langle a^*, x\rangle - y \leq c\}$$

Lemma: $f: X \to \mathbb{R}$ konvex und Gâteaux-Ableitung $f'(x) \in X^*$ existiert bei $x \in X$, dann: $\langle f'(x), h\rangle = \inf_{t>0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$

und damit: $\langle f'(x), h\rangle \leq f(x+h) - f(x)$

Bew:

$$\langle f'(x), h\rangle = \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{f(x+th) - f(x)}{t}}_{\text{monoton wachsend, denn:}} = \inf_{t>0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

$$\forall 0 < s < t: \frac{f(x+sh) - f(x)}{s} \leq \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x+sh)} \leq \underbrace{f(x) - \frac{s}{t} f(x)} + \frac{s}{t} f(x+th)$$

$$= \frac{t-s}{t} x + \frac{s}{t}(x+th) \qquad \frac{t-s}{t} f(x) \quad \text{mit } \frac{t-s}{t} + \frac{s}{t} = 1$$

$\Leftrightarrow f$ konvex #

Satz: $f: X \to \mathbb{R}$, konvex und Gâteaux-Ableitung $f'(x)$ existiert an x, dann: $\partial f(x) = \{f'(x)\}$

Bew: "$\supseteq$": Lemma $\Rightarrow \langle f'(x), p-x\rangle \leq f(p) - f(x) \; \forall p \in X$

$$\Leftrightarrow f'(x) \in \partial f(x)$$

"$\subseteq$": $x^* \in \partial f(x) \Rightarrow \forall p \in X: \langle x^*, p-x\rangle \leq f(p) - f(x)$

$\Leftrightarrow \forall h \in X \; \forall \lambda > 0: \lambda \langle x^*, h\rangle = \langle x^*, \lambda h\rangle \leq f(x+\lambda h) - f(x)$

$$\Leftrightarrow \langle x^*, h\rangle \leq \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$$

$\Rightarrow \forall h \in X: \langle x^*, h\rangle \leq \langle f'(x), h\rangle \Rightarrow x^* = f'(x)$

$-h$ und $h \Rightarrow \langle x^*, h\rangle = \langle f'(x), h\rangle$

Satz: $\partial(f+g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$
(mit Gleichheit, wenn $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$)

Bew: „$\supseteq$": Def. aufaddieren, „$\subseteq$": nicht hier

Satz: f hat globales Minimum in $\bar{x}$, genau dann wenn $0 \in \partial f(\bar{x})$

Bew: $\forall x \in X: f(x) \geq f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \langle 0, x - \bar{x} \rangle \Leftrightarrow 0 \in \partial f(\bar{x})$

Lemma: $f: X \to \mathbb{R}$ konvex und stetig in x, dann $\partial f(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

Bew: mit Trennungssätzen (+ pathologische Fälle)

Satz (Young Ungl.-Gleichheit und Biconjugation):
Sei f konvex und stetig. Es gilt $\forall x \in X, x^* \in X^*$:

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle = f^{**}(x) + f^*(x^*) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*)$$

Insb: $\forall f$ konvex: $f^{**} = f$ und $x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*)$.

Vorbereitung: $\boxed{f^{**}: X \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sup_{x^* \in X^*} \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)}$

Young-Ungl.: $\langle x^*, x \rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$

und analog: $\langle x^*, x \rangle \leq f^{**}(x) + f^*(x^*)$

Bew:

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow \forall p \in X: \langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \langle x^*, p \rangle - f(p)$$

$$\Leftrightarrow \langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \sup_{p \in X} \langle x^*, p \rangle - f(p) = f^*(x^*)$$

$$\Leftrightarrow \langle x^*, x \rangle \geq f(x) + f^*(x^*)$$

mit Young folgt „$=$".

Analog zeigt man: $x \in \partial f^*(x^*) \Leftrightarrow \langle x^*, x \rangle = f^{**}(x) + f^*(x^*)$

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \leq f(x)$$

Young: $\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \leq f(x)$

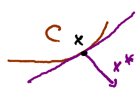
f konvex $\Rightarrow \exists x^* \in \partial f(x) \neq \emptyset: \langle x^*, x \rangle - f(x^*) = f(x)$

$$\Rightarrow f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) = f(x) \Rightarrow f^{**}(x) = f(x)$$

#

Satz (Normalkegel):

C konvexe Menge $\subseteq X$, dann $\overset{N_C(x)}{\overset{\|}{\partial \iota_C(x)}} := \begin{cases} \{x^* \in X^*: \forall p \in C: \langle x^*, p - x \rangle \leq 0\} & : x \in C \\ \emptyset & : x \notin C \end{cases}$



Bew: $x \notin C: \partial \iota_C(x) = \emptyset$ klar. Sei $x^* \in \partial \iota_C(x)$:

$x \in C: \forall p \notin C: +\infty \geq 0 + \langle x^*, p - x \rangle \wedge \forall p \in C: 0 \geq 0 + \langle x^*, p - x \rangle$ #

Damit können wir die Bearbeitung der Fallstudie fortsetzen:

konvexer Term

$\bar{x}$ ist Lsg von $\min\limits_{x \in X} I_{TV}(x) + \frac{1}{2\lambda} \| x - x_0 \|$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \in \partial \left(I_{TV}(\cdot) + \frac{1}{2\lambda} \| \cdot - x_0 \|^2 \right)(\bar{x})$$

$$\Leftarrow \quad 0 \in \partial I_{TV}(\bar{x}) + \partial \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2\lambda} \| \cdot - x_0 \|^2}_{\text{diff'barer Term: } \partial \cdot = \{ \frac{1}{\lambda}(x - x_0) \}} \Big)(\bar{x})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \in \partial I_{TV}(\bar{x}) + \frac{1}{\lambda}(\bar{x} - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} \in \partial I_{TV}(\bar{x}) \Leftrightarrow \frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} \in \partial c_K^*(\bar{x})$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x} \in \partial c_K\left(\frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} \right) \Leftrightarrow 0 \in -\bar{x} + \partial c_K\left(\frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} \right)$$

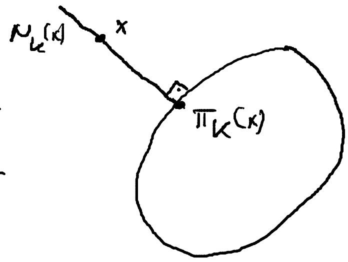
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_0}{\lambda} \in \frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} + \partial c_K\left(\frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} \right) = (\underbrace{id + \partial c_K}_{=:T})\left(\frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_0 - \bar{x}}{\lambda} \in T^{-1}\left(\frac{x_0}{\lambda} \right) \Leftrightarrow \bar{x} \in x_0 - \lambda T^{-1}\left(\frac{x_0}{\lambda} \right)$$

$T = id + N_K \Rightarrow T^{-1} = \Pi_K$: orthogonale Projektion auf K

$$\Rightarrow \bar{x} \in x_0 - \lambda \Pi_K\left(\frac{x_0}{\lambda} \right)$$

$$T \circ T^{-1} = (id + N_K) \circ \Pi_K \Rightarrow T \circ T^{-1}(X) \supseteq X$$
$$T^{-1} \circ T = \Pi_K \circ (id + N_K) \Rightarrow T^{-1} \circ T(X) = X$$



Anschaulich ($\lambda = 1$):

$\bar{x} \in x_0 - \Pi_K(x_0)$

K beschreibt die Menge aller Störungen.

$\Pi_K(x_0) \in K$ extrahiert die Störung aus x_0 und $\bar{x}$ ist das störungsfreie Bild: $\Pi_K \circ (id - \Pi_K) = \Pi_K - \Pi_K \circ \Pi_K =$
$= \Pi_K - \Pi_K = 0$

Fragen

Friday, June 10, 2011
4:57 PM

- Was heißt support function auf Deutsch?
- Beweis für Subdiff != \EmptySet bei konvexen Funktionen

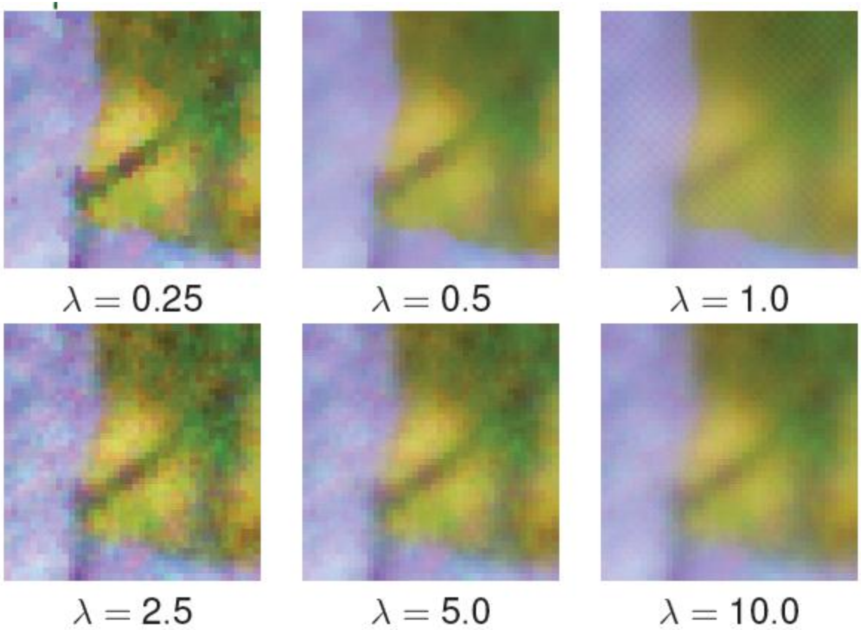
Anmerkungen:

- Darstellungssatz von Riesz eineindeutig H->H*
- => jeder Hilbertraum ist reflexiv

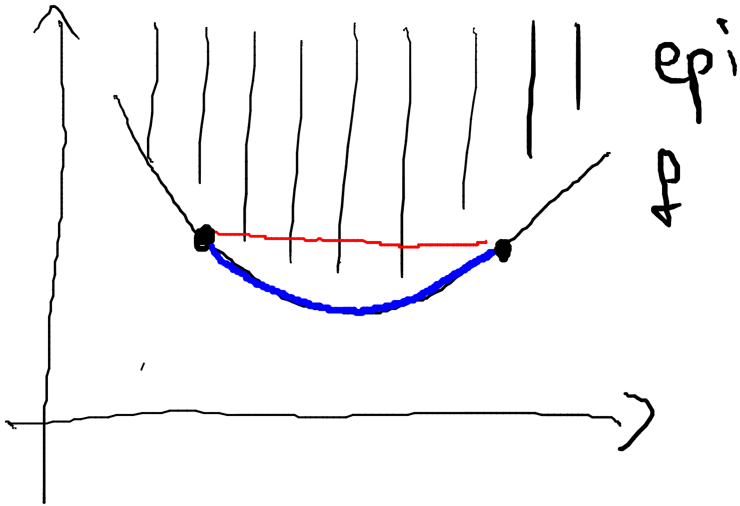
Konvexe Analysis

Ein Beispiel

Totale Variation vs Squared Gradient

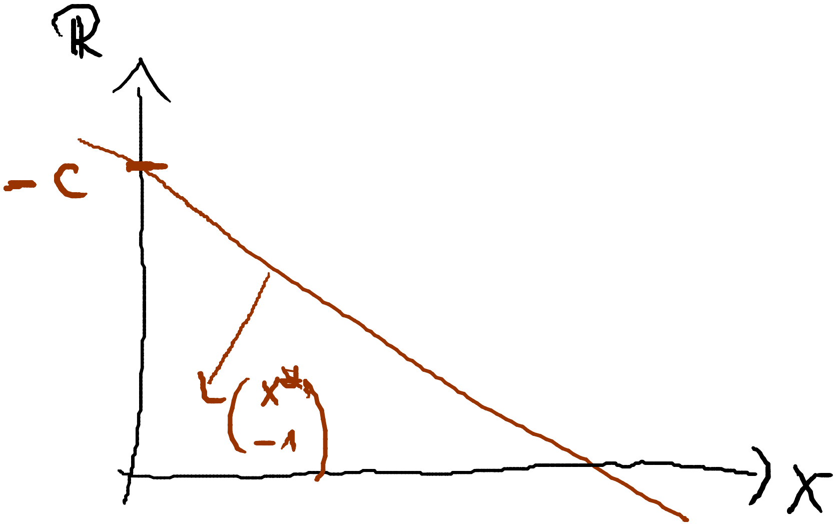


Konvexe Funktionen, Epigraph & analytische Konvexität



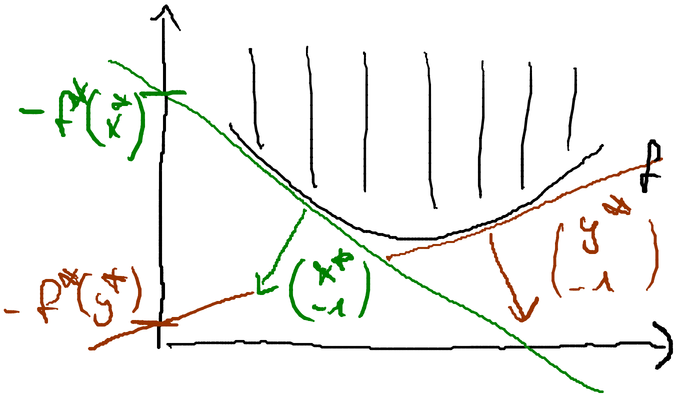
Hyperebenenfunktion

$$u_{x^*,c}(x) := \langle x^*, x \rangle - c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ u_{x^*,c}(x) \end{pmatrix} = c$$



Fenchel Konjugiertes

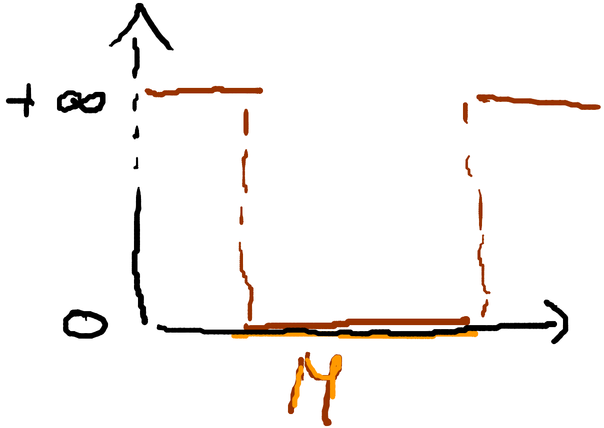
Intuition für f^*:



Young: $\underbrace{h_{x^*, f^*(x^*)}}(x) = \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

Gerade mit Normalen x^*, die an epi f anliegt.

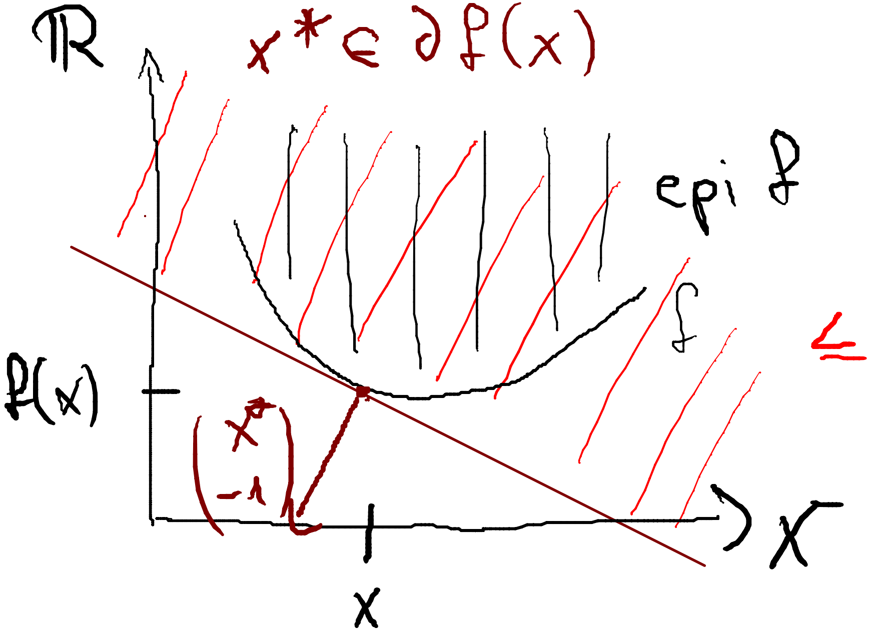
Indikatorfunktion



$$J_{TV}(x) = \sup\left\{ \int_\Omega x(t)\,\mathrm{div}\,\xi(t)\,dt : \xi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2),\ \|\xi\|_\infty \le 1 \right\}$$

Subdifferential

Intuition:



Benutzte Sätze und Folgerungen

Satz: $\partial(f+g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$

Satz: f hat globales Minimum in $\bar{x}$, genau dann wenn $0 \in \partial f(\bar{x})$

Satz (Young Ungl. – Gleichheit und Bikonjugation):

Es gilt: $\forall x \in X, x^* \in X^*$:

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle = f^{**}(x) + f^*(x^*) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*)$$

Insb: $\forall f$ konvex: $f^{**} = f$ und $x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*)$.

Satz: $f : X \to \mathbb{R}$, konvex und Gâteaux-Ableitung $f'(x)$ existiert an x,
dann: $\partial f(x) = \{f'(x)\}$

Folgerung:

$$I_{TV}(x) = \sup_{x^* \in K = \{\operatorname{div} \xi : \xi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\xi\|_\infty \le 1\}} \langle x^*, x \rangle = c_K^*(x)$$

Literatur

- R. T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970. Reprint: 1997
- Variational Methods and Convex Optimization in Computer Vision, Lecture by Dr Goldlücke, http://wwwcremers.in.tum.de/index.php?nav=teaching&target=ss2010/vmcv2010.html
- Martin Brokate, Konvexe Analysus, Skript SS2008
- Antonin Chambolle, An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications, Journal of Mathematical Imaging and Vision 20: 89–97, 2004
- A. Chambolle, V. Caselles, M. Novag, D. Cremers and T. Pock, An introduction to Total Variation for Image Analysis, Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery, De Gruyter, 2010
- Jonathan M. Borwein, Jon D. Vanderwerff, Convex functions: constructions, characterizations and counterexamples, Cambridge University Press, 2010