Analysis Preparation

Note Title 2/9/2009

10) $p_1, \dots, p_n > 0$; $\sum_k p_k = 1$

zz. $\sum_{k=1}^{n} \left(p_k + \frac{1}{p_k}\right)^2 \geq n^3 + 2n + n^{-1}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(p_k^2 + 2 + \frac{1}{p_k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + 2n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} \geq n^3 + 2n + n^{-1}$

CS:

$\sum_k x_k y_k \leq \sqrt{\sum_k x_k^2 \cdot \sum_k y_k^2}$

$\sum_k p_k = 1$

$\sqrt{\sum_k p_k^2 \sum_k 1} \geq \sum_k p_k \cdot 1 = 1$

$\Leftrightarrow \sum_k p_k^2 \, n \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_k p_k^2 \geq n^{-1}}$

$\frac{1}{\sum_k p_k^2} \leq n$

Abschätzung für $\sum_k 1/p_k^2$ finden

$\sqrt{\sum_k \frac{1}{p_k^2} \sum_k p_k^2} \geq \sum_k 1 = n$

hrm... >_<

$\sum_k \frac{1}{p_k^2} \sum_k p_k^2 \geq n^2$

$\sqrt{\sum_k \frac{1}{p_k^2} \underbrace{\sum_k 1}_{= n}} \geq \sum_k \frac{1}{p_k} \geq n^2$

$\left(\sqrt{\sum_k \frac{1}{p_k} \underbrace{\sum_k p_k}_{= 1}} \geq \sum_k \frac{1}{\sqrt{p_k}} \cdot \sqrt{p_k} = n \Leftrightarrow \sum_k \frac{1}{p_k} \geq n^2\right)$

$\sum_k \frac{1}{p_k^2} \cdot n \geq n^4 \Leftrightarrow \sum_k \frac{1}{p_k^2} \geq n^3$

$\#$

5) $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{n}{n-1}\right)}_{>0}^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = \underbrace{\underbrace{(n^2-1)}_{>1}\ \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{>1}}_{>1}$$

$n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$\frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \leq 1$ bzw < 1 für $k > 1$; $<$ wegen $n \geq 2$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$$

$1 = \frac{1}{0!}$; $\frac{1}{2} \neq 0$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 = 2^{k-1}$$

ab $k \geq 1$!

Wichtig: immer Gültigkeitsbereich überprüfen!!!

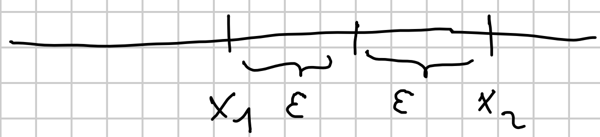
54) (x_n) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$

zz. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ist eindeutig

es reicht zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ für $x_n \in \mathbb{R}^m$ eindeutig ist, da die vektorwertige Konvergenz komponentenweise definiert ist.

angenommen:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_1 \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_2$$



$$\varepsilon < \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |x_1 - x_n| \leq \varepsilon \wedge |x_2 - x_n| \leq \varepsilon$$

$$|x_1 - x_2| = |x_1 - x_n + x_n - x_2| \leq |x_1 - x_n| + \underbrace{|x_2 - x_n|}_{|x_n - x_2|} < |x_1 - x_2|$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2| \quad ↯$$

2) Satz des Archimedes

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

z.z. f ist nirgends stetig.

d.h. f ist ist an keinem Punkt stetig.

$a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(Bew: ang. $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge a+b \in \mathbb{Q}$, dann $a+b-a = b \in \mathbb{Q}$ ↯)

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? egal...

Angenommen: 1) $x \in \mathbb{Q}$,

dann $a_n = x - \frac{1}{n}\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = 0 \neq f(x) = 1 \Rightarrow$ nicht stetig in x

2) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

dann a_n = Dezimaldarstellung von x auf n Stellen

$\Rightarrow a_n \in \mathbb{Q}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = 1 \neq f(x) = 0$

$\Rightarrow$ f ist nicht stetig in x

#

4) $$\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = \lim_{n \to \infty} e^{\ln n^{1/n}} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \right)$$

5) $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$

Fixpunkt:

$x_{n+1} = f(x_n)$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow n \to \infty$:

$$\underline{\underline{\begin{matrix} x_{n+1} = f(x_n) \\ \downarrow \qquad \quad \downarrow \\ x = f(x) \end{matrix}}}$$

$x = \sqrt{1+x} \quad |^2 \qquad (x \geq -1)$

$\Rightarrow x^2 = 1+x$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x \geq -1 \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Rest analog. Mit Banach'schem Fixpunktsatz über-
prüfen.

6) $a, b > 0.$ $a_0 = a,\ b_0 = b$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$$

Fixpunkt:

$$a' = \frac{a' + b'}{2}; \quad b' = \sqrt{a' b'} \Leftrightarrow b'^2 = a' b' \Leftrightarrow b' = 0 \lor \underline{\underline{b' = a'}}$$

$b' = 0$: $\quad a' = \frac{a'}{2} \Rightarrow a' = b'$. $\quad$ | $\quad b' = a'$: $\quad a' = \frac{2a'}{2}$ (✓)

$\wedge$ $a' = 0$

noch zu zeigen: a_n, b_n konvergieren tatsächlich...

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$a_{n+2} = \frac{\frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{a_n b_n}}{2} = \frac{a_n + b_n}{4} + \frac{\sqrt{a_n b_n}}{2} =$$

$$= \frac{a_n + b_n}{4} + \sqrt{\frac{a_n b_n}{4}}$$

$$b_{n+2} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} \cdot \sqrt{a_n b_n}} = \sqrt[2]{\frac{a_n + b_n}{2}} \cdot \sqrt[4]{a_n b_n}$$

8) $(a_n), (b_n)$ beschränkte Folgen reeller Zahlen

z.z. $\lim_{n\to\infty} \sup(a_n+b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n}(a_m+b_m) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} a_m + \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} b_m$

$(n\to\infty)$

$\sup_{m\geq n}(a_m+b_m) \leq \sup_{m,m'\geq n}(a_m+b_{m'}) = \sup_{m\geq n} a_m + \sup_{m'\geq n} b_{m'}$,

da $\{a_m+b_m \mid m\geq n\} \subseteq \{a_m+b_{m'} \mid m,m'\geq n\}$ etc.

bei lim inf:

$\lim_{n\to\infty} \inf(a_n+b_n) \geq \lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \inf b_n$

3) $a, b \in \mathbb{R}$ ges. $\forall n \in \mathbb{N}: p_1, \dots, p_n \geq 0$ mit $\sum_i p_i = 1$

$$a \leq (1+p_1)(1+p_2) \cdot \ldots \cdot (1+p_n) \leq b$$

$$\left(\prod_i (1+p_i)\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_i 1+p_i = \frac{1}{n}(n+1) = 1+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \prod_i (1+p_i) \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

hier gilt nie =

$$\prod_i (1+p_i) \geq 1+p_1+\ldots+p_i+\underbrace{\ldots}_{\geq 0} \geq 1+1 = 2$$

Gleichheit gilt, wenn $p_i = 1$; $p_j = 0$ $\forall j \neq i$.

$\prod_i (1+x_i) \geq 1+\sum_i x_i$ mit $\forall x_1, \dots x_i \geq 0$

Induktion nach n: $n=1$: $1+x_1 \geq 1+x_1$

$n \to n+1$: $\prod_{i=1}^{n} (1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1+x_i) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1+x_{n+1}) = 1+\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1}}_{\geq 0}$$

$$\geq 1+\sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

10) $V = xyz > 0$

$$A = 2xy + 2xz + 2yz = 2\left(\frac{V}{z} + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right) =$$

$$= 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

$$\left(\frac{1}{xyz}\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Gleichheit für $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{V = s^3}$

$$3 \frac{1}{V}^{1/3} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\boxed{A = 6V^{2/3}}$$

$$A = 2(xy + xz + yz)$$

$$\sqrt[3]{xy \cdot xz \cdot yz} \leq \frac{1}{3}(xy + xz + yz)$$

$$3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq xy + xz + yz$$

$$6V^{2/3} \leq A$$

etc.

11) a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} (k+1) \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} =$$

$\downarrow$ 1

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \underline{\underline{e^{-1}}} < 1 \Rightarrow \text{konvergiert}$$

$$\underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} = \text{kein spezieller Grenzwert}}}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$; $\left|\frac{1}{k}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ majorisiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$

Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)^{-3/2}}{k^{-3/2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} =$

$\left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\right)^{3/2} = 1^{3/2} = 1 \Leftarrow$ Keine Aussage möglich

Wurzelkriterium:

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{-3/2}} = \lim_{k\to\infty} k^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln k^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k}}} = e^{\lim_{k\to\infty} -\frac{3}{2}\cdot\frac{\ln k}{k}} =$$

$\to 0$

$= 1$:-(

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = 1 + \left(\frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z}\right) + \left(\frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{7^z}\right) + \ldots$$

$z > 1 \Rightarrow z > 0 \Rightarrow k^z < (k+1)^z \quad (k > 0)$

$$\begin{array}{cccccccc} & & \wedge\!| & \wedge\!| & \wedge\!| & \wedge\!| & \wedge\!| & \wedge\!| \end{array}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{2}{2^z} + \frac{4}{4^z} + \ldots = 1 + 2^{1-z} + 4^{1-z} + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k\right)^{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-z}\right)^k = \frac{1}{1-2^{1-z}}$$

$z > 1 \to 1 - z < 0 \Rightarrow 2^{1-z} < 1$

$1/k^z \geq 0$ und durch $\uparrow$ beschränkt $\Rightarrow$ konvergiert.

oder auch $\frac{1}{k^z}$ konvergiert majorisiert $\left|\frac{1}{k^z}\right| \leq \frac{1}{\left(2^{\lfloor \log_2 k \rfloor}\right)^z}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ $\quad - \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \ (k \to \infty)$

$\Rightarrow$ konvergiert nach Leibniz'schem Konvergenzkriterium.

e) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1+2^{-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1}$$

$$\left|\frac{1}{2^{k+1}}\right| = \frac{1}{2^k+1} \leq \frac{1}{2^k}$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ majorisiert

$\Rightarrow$ ~~konvergiert gegen 2 (+1 vernachlässigbar)~~ !

höchstens mittels Trading Tails >_>'

f) $$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} =$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\overbrace{\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}^{=-k+\frac{1}{2}}}{k!} =$$

meh!

$$= \frac{(-1)^k \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!} = (-1)^k \frac{2^{-k}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{k!} =$$

$$= (-2)^{-k}\frac{(2k)!}{k!\,2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k\, k!\,k!} = (-1)^k \binom{2k}{k} 4^{-k}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} = \underbrace{(-1)^k \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}}_{=:a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0$$

$\Rightarrow$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe

12) $\to$ Πcopie $= \ln(2)\dots$

13)

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$S = \ln 2$$

$$S' = 0$$

$$S' = \underbrace{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)}_{<0} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16}\right)$$

$> - <$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k' \quad ; \quad a_k' = a_{2k-1} - \sum_{i=1}^{4} a_{\cancel{4}\,8(k-1)+2i}$$

14)

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}_{=: a_k}$$

$$s^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} a_j \, a_{k-j}}_{=: c_k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j (-1)^{k-j}}{\sqrt{j+1}\sqrt{(k-j)+1}} \overset{*}{\geq} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{\frac{k}{2}+1}$$

geht das? nicht direkt!

$$\sqrt{j+1}\sqrt{k-j+1} \leq \frac{j+1+k-j+1}{2} = \frac{k}{2}+1$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } 2 \nmid k \\ \frac{1}{\frac{k}{2}+1} & \text{für } 2 \mid k \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \underset{?}{=} \infty$$

$$* = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{\sqrt{j+1}\sqrt{k-j+1}} = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{k-j+1}}$$

$$\left| (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{k-j+1}} \right| = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{k-j+1}} \geq \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\frac{k}{2}+1}$$

Rest analog

15)

Z.z. $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2}_{a} < \infty \;\wedge\; \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}_{=b} < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{|a_k \cdot b_k|}_{=|a_k||b_k|} < \infty$

Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2} = \sqrt{a \cdot b} < \infty$$

geht das? ja, es geht (siehe Email).

=

Über AM-GM:

$$|a_k| \cdot |b_k| = \sqrt{|a_k^2 b_k^2|} \leq \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(|a_k|^2 + |b_k|^2) = \ldots < \infty \quad \text{wegen V.}$$

$\Rightarrow$ Majorisierte Konvergenz

Z

$a_k \geq 0 \Rightarrow \sum_k a_k = \sum_k |a_k| = \sum_k (\sqrt{a_k})^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k} < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2$$

1c) (a_k) mit $a_k > 0$ und $\sum_k a_k$ divergiert.

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/k}{\frac{1}{k}+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/k}{\frac{k+1}{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Vermutung: $\frac{a_k}{1+a_k}$ divergiert auch

17) Satz: stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt

$[0,1]$ ist kompakt, $(0,1)$ aber nicht (da nicht abgeschlossen)

$\Rightarrow$ $f: [0,1] \to (0,1)$ kann nicht stetig sein ↯

✓ (passt)

=

anderer Ansatz: f kann nicht bijektiv sein mit Widerspruch:

f auf kompakter Menge $[0,1]$

$\Rightarrow$ hat Maximum in x^* : $y^* = f(x^*) \in (0,1)$

aber $y' = \frac{y^*+1}{2} > y^*$ und da f bijektiv:

$\exists x' : f(x') = y'$ ↯ zur Max. von y^*

=

$y^* < 1 \Rightarrow f: [0,1] \to (0,m) \subsetneq (0,1)$

↯ f ist nicht surjektiv

18)

$$23x^4 + 15x^5 - 7x^6 + 113x^9 = O(x^4) \qquad x \to 0$$
$$= o(x^3)$$

$$23x^4 + 15x^5 - 7x^6 + 113x^9 = O(x^9) \qquad x \to \infty$$
$$= o(x^{10})$$

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \ldots = O(1) \qquad n \to \infty$$
$$o(1)$$

hmm :-/

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e - (1 + \frac{1}{n})^n}{n^{-n}} = 0 - \lim_{n \to \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n^{-n}}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \ldots$$
$$\leq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{} + \ldots$$
$$= 1 + 1 + 1 + \ldots$$
$$\leq 1 + \log_2 n$$
$$\Rightarrow H_n = O(\log n)$$
$$= o(n) \quad \text{z.B.}$$

$$\binom{2n}{n} \simeq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow \binom{2n}{n} = O\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= o(4^n)$$

19)

a) $\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$

$s = 0$, dann $\beta(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1}$ divergiert

$s < 0$, dann divergiert $\beta(s)$, da schon $\frac{1}{(2k+1)^s}$ unbeschränkt wächst

$s > 0$; dann:

$$\frac{1}{(2k+1)^s} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

$\Rightarrow$ die alternierende Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium

b) $\beta(1)$ ist gerade die Leibniz'sche Reihe.

c) einfache Einschließung durch Auswerten der 1. 3 Reihenglieder:

$$\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}}_{-\frac{1}{7^s} \leq \dots \leq \frac{1}{7^s}}$$

also: $c(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s}$

$$c(s) - \frac{1}{7^s} \leq \beta(s) \leq c(s) + \frac{1}{7^s}$$

d)

e) $\lim_{s\to\infty} \beta(s) = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{s\to\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} =$

$$\leq \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{s_0}}$$

für $s_0 > s$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{s\to\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = 1$$

$\downarrow$ 0 $\qquad 2k+1 > 1$

f) $\beta(s) = c + O(f(s)) \qquad (s \to \infty)$

$$\beta(s) = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}}_{| \quad | \leq} = 1 + O(3^{-s})$$

$$\frac{1}{3^s} = 3^{-s}$$

S. 81/82) Beweis des Satzes:

c) $\Rightarrow$ b)

$0 \leq f''(x) \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(x)$ ist monoton wachsend

$\Rightarrow \quad f'(x_0) \leq f'(\xi) \leq f'(x_1) \quad \forall \xi \in (x_0, x_1), \ x_0 \lneq x_1, \ x_0, x_1 \in (a,b)$

also auch für ξ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

b) $\Rightarrow$ a)

$\forall x_0, x_1$ mit $x_0 \leq x_1$: $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_1)$

21) a) sinh, cosh sind überall diff'bar.

$\cosh x = 0 \iff e^{x} = -e^{-x}$ das ist nie der Fall

$\Rightarrow$ tanh x ist auch überall diff'bar

$\sinh x = 0 \iff e^{x} = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$

$\Rightarrow$ coth ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ diff'bar

b)

$$\sinh' x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\tanh' x = \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2(x)} =$$

$$= 1 - \tanh^2(x)$$

$$\coth' x = -\frac{1}{\tanh^2(x)} \cdot \left(1 - \tanh^2(x)\right) =$$

$$= 1 - \coth^2(x)$$

c) $\sinh -x = -\sinh x$ $\qquad$ $\cosh -x = \cosh x$

$\sinh 0 = 0$ $\qquad$ $\cosh 0 = 1$

$\Rightarrow \sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\cosh: \mathbb{R} \to [1;\infty)$

$\sinh' x = \cosh x > 0$

$\Rightarrow$ sinh ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ injektiv

$\Rightarrow D_{\text{arsinh}} = \mathbb{R}$

$\cosh' x = \sinh x \Rightarrow$ für $x > 0$ ist cosh auch streng monoton wachsend $\Rightarrow D_{\operatorname{arcosh}} = \mathbb{R}_0^+$

$\tanh(-x) = -\tanh x$

$\tanh 0 = 0$

$\tanh' x = 1 - \tanh^2(x) \Rightarrow$ Fixstellen bei $x = \pm 1$

$D_{\operatorname{artanh}} = (-1, 1)$

$\Rightarrow$ auch streng monoton wachsend $\Rightarrow$ injektiv

$\Rightarrow$ $|\tanh x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| \leq 1$

$\Leftrightarrow \left| \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |e^{2x} - 1| \leq |e^{2x} + 1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |e^{2x} - 1| - |e^{2x} + 1| \leq 0$

$|e^{2x} - 1| - |e^{2x} + 1| \leq |2e^{2x}| < 0$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

coth 0 nicht definiert

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

$\uparrow$

$\in (-1,1)$

da tanh x streng monoton $\Rightarrow$ auch coth injektiv

$$\Rightarrow D_{\text{arcoth}} = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

$$\text{arcoth}'(x) = \frac{1}{1-\coth^2(\text{arcoth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

2)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \quad ; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$$

Vereinfachen:

$$\frac{x(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x-1)}{x+1}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2 - x}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow$ überall diff'bar außer für $x = \pm 1$

$$g(x) = |x^2 - 1| + |x| - 1 \quad ; D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \operatorname{sgn}(x^2-1) \cdot 2x + \operatorname{sgn}(x)$$

nicht def für 0

$\operatorname{abs}' = \operatorname{sgn}$

$\Rightarrow$ diffbar in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$$h(x) = \sqrt{\frac{3|x|}{x} - \frac{5}{2}} \quad ; D_h = \mathbb{R}^+$$

$$\frac{3|x|}{x} - \frac{5}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 3 \operatorname{sgn}(x) - \frac{5}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(x) \geq \frac{5}{6}$$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = 1 \Leftrightarrow x > 0$ $\quad \left(3\frac{|x|}{x} - \frac{5}{2} > 0 \right.$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3\frac{|x|}{x} - \frac{5}{2}}} \cdot 3\operatorname{sgn}'(x)$$

$\leftarrow > 0 \ \forall x$

$\hookrightarrow x \neq 0$

3)

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x) = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \ldots = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \prod_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^{n} f_j(x)$$

$$= (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)(x) \cdot \left(L f_1(x) + L f_2(x) + \ldots + L f_3(x) \right)$$

$\Uparrow$

falls $f_k(x) \neq 0 \ \forall k \in [n]$

4)

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}\cdot 1}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

b) $$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x\cdot\sin(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)\cdot x + \cos(x) - \cos(x)}{x\cos(x) + \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)\cdot x}{x\cos(x)+\sin(x)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

"$\frac{1}{0}$"

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{\cos(x) - x\sin(x) + \cos(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)\cdot x^2} =$$

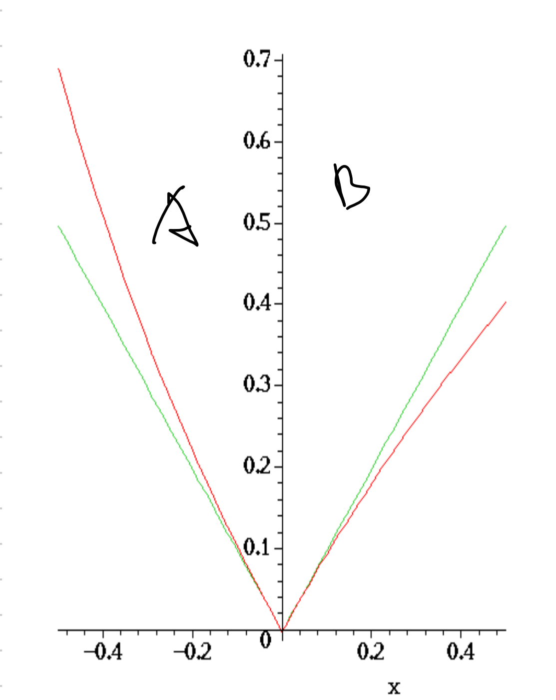
$$= \dots = 1/3$$

5) ges. $a > 0$ (bestmöglich) mit

$$|\ln(1+x)| \le a|x| \quad (|x| \le 1/2)$$

$$\underset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right| \le a$$

$x \in [-1/2; 1/2] \Rightarrow \left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right|$ nimmt Max (und Min) irgendwo an.



$f(x) = |\ln(1+x)|$

ist für $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ konvex

und für $0 \le x \le \frac{1}{2}$ konkav

$\Rightarrow a = \max\left(\left|\frac{f(-1/2) - f(0)}{-1/2}\right|, |f'(0)|\right)$

denn: in A liegt die Sehne über $f(x)$

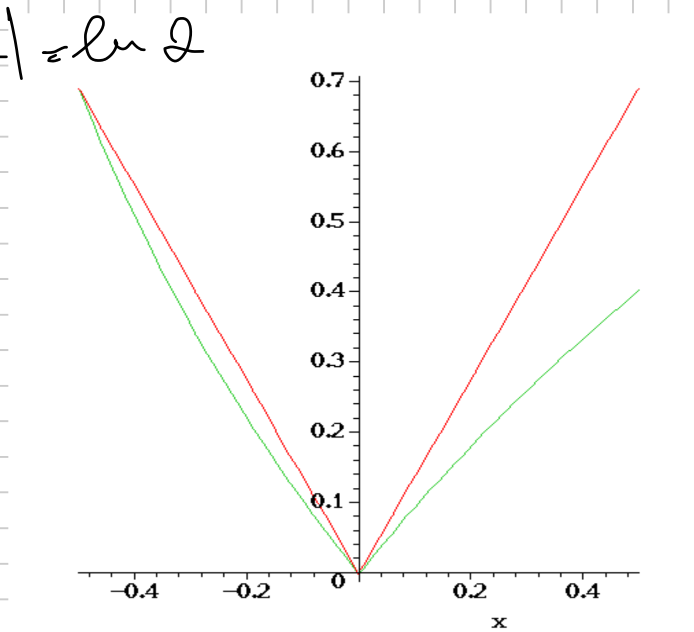
und für B gilt:

$f(x) \le f(0) + f'(0)(x - 0) =$

$= 1 \cdot x$

$f(1/2) = |\ln(1/2)| = |-\ln 2| = \ln 2$

$2 \ln 2 = 1.3862\ldots$



6) a) $f(x) = x^{-1} e^{-(\ln x)^2/2}$; $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = -x^{-2} e^{-(\ln x)^2/2} + x^{-1} e^{-(\ln x)^2/2} \cdot \left(- \frac{2(\ln x)}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) =$$

$$= -x^{2} e^{-(\ln x)^2/2} - x^{-2} e^{-(\ln x)^2/2} \cdot \ln x =$$

$$= \underbrace{-x^{2} e^{-(\ln x)^2/2}}_{>0} (1 + \ln x) \gtreqless 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(1 + \ln x) \gtreqless 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \ln x \lesseqgtr 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln x \lesseqgtr -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \lesseqgtr e^{-1}$$

d.h.
$x < e^{-1} \Rightarrow f'(x) > 0$
$x = e^{-1} \Rightarrow f'(x) = 0$
$x > e^{-1} \Rightarrow f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ Max bei $x = e^{-1} \in D_f$

$\Rightarrow$

globaler Verlauf $\Rightarrow$ RP und Schnitt

b) $g(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$

$$g'(x) = -e^{-x} e^{-e^{-x}} + e^{-x} e^{-e^{-x}} \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) =$$

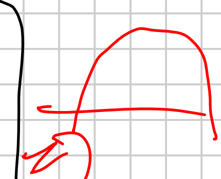
$$= \underbrace{e^{-x} e^{-e^{-x}}}_{>0} (e^{-x} - 1) \gtreqless 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x} - 1 \gtreqless 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x} \gtreqless 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -x \gtreqless 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \lesseqgtr 0$$



globaler Verlauf

d.h.
$x < 0 \Rightarrow g'(x) > 0$
$x = 0 \Rightarrow g'(x) = 0$
$x > 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

$\Rightarrow$ Max bei $x = 0$

$(0 \mid e^0 \cdot e^{-1} = e^{-1})$

7) ZZ. $f(x) = c + g(x)$

d.h. $(f(x) - g(x))' \overset{!}{=} 0$

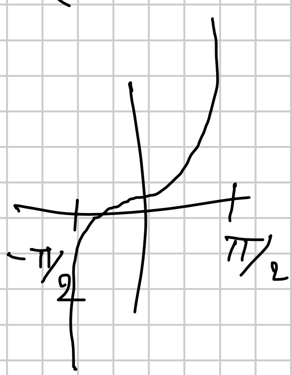
$f(x) = \arctan(x)$; $g(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

$\Rightarrow x \neq 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x^2)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2} \quad (\checkmark)$$

also, $f'(x) = g'(x)$



Zuerst: $x \in (1, \infty)$:

$$\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\sin(-\pi/4)}{\cos(-\pi/4)} = -1$$

$$\lim_{x \to \infty} \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} \longrightarrow -1$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

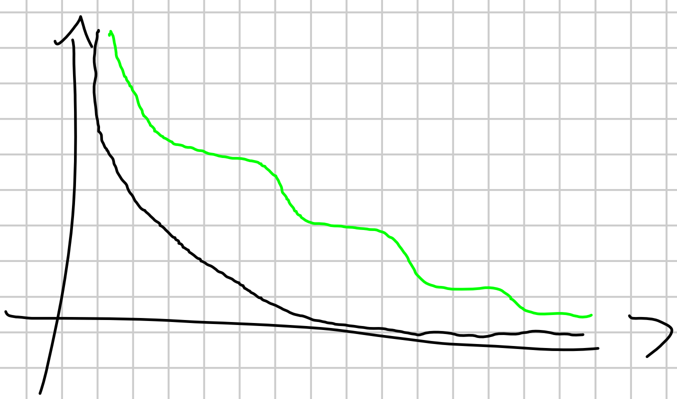
$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

also: $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

also: $g(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{3}{4}\pi & \text{für } x > 0 \\ f(x) + \frac{\pi}{4} & \text{für } x < 0 \end{cases}$

8) $f: (a, \infty) \to \mathbb{R}$; $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x > 0$

$f(x) \to 0 \;\; (x \to \infty)$



ja, $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \geq a$

wegen $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \geq a \Rightarrow f$ ist monoton fallend

d.h. $f(x) \geq f(x+h) \qquad h \in \mathbb{R}^+$

$$\downarrow h\to\infty \quad \downarrow$$

$$f(x) \geq 0$$

9)

$$f(x) = x^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = 2x \frac{e^x}{(e^x-1)^2} + x^2 \cdot \left(\frac{e^x (e^x-1)^2 - 2(e^x-1) \cdot e^x \cdot e^x}{(e^x-1)^2} \right)$$

Trick?

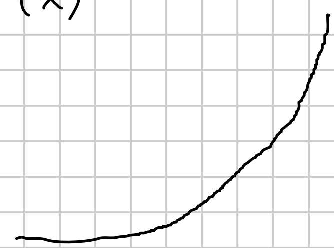
10) $f: I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ surjektiv und diff'bar

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

a) $\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ f ist injektiv $\qquad f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} > 0$

$\Rightarrow$ f^{-1} existiert $\Rightarrow$



b) Sei f konvex $\Rightarrow$ $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
streng

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$f^{-1\prime\prime}(y) = -\left(f^{-1\prime}(y)\right)^2 f''(f^{-1}(y)) \cdot f^{-1\prime}(y) =$$

$$= -\left(f^{-1\prime}(y)\right)^3 f''(f^{-1}(y)) =$$

$$= -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \leq 0$$

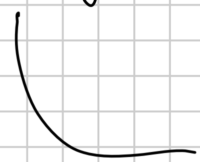
$\Rightarrow$ rechtsgekrümmt (konkav)

c) analog

11) nach der Jensen'schen Ungleichung:

$x>0$: $f(x) = 1/x$ ist konvex

$f''(x) = 1/x^3 > 0$



also:

$$f\left(\frac{1}{3}(x-1+x+x+1)\right) = f(x) = 1/x \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

$x>1$

$$\frac{3}{x} \le \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$$

Gleichheit gilt nie :-(

allg: $\frac{1}{x-k} \dots + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+k} \ge \frac{2k+1}{x}$

mit $x>k$ (analog zu oben)

Wir wählen $x=k+1$, dann:

$$\sum_{j=1}^{2k+1} \frac{1}{j} \ge \frac{2k+1}{k+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \ge \frac{n}{\frac{n-1}{2}+1} = \frac{n}{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+1/n}$$

$$H = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\ge 1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$

$$\ge 1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

12) z.z. $\underbrace{(1+x)^n}_{=f(x)} \geq 1+nx \quad (x>-1)$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = n^2 (1+x)^{n-2} \geq 0 \quad \text{wenn } 1+x \geq 0,\ n > 2$$

$\Rightarrow$ f ist konvex

$$f'(0) = n \cdot 1^{n-1} = n$$

Es gilt: $f(0) + f'(0)(x-0) \leq f(x)$

$$1 + nx \leq (1+x)^n$$

$n=0$, $n=1$ sind trivial zu verifizieren ...

\o/

13) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diff'bar.

zz. $\exists \xi \in (a,b) : (f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$

a) $g'(\xi) \neq 0 \wedge g(b) \neq g(a)$:

Die Aussage folgt sofort aus dem Mittelwertsatz.

b) $g'(\xi) = 0 \vee g(b) = g(a)$,

Das hier ist alles Quark ...

Sei $g(b) = g(a)$ dann:

zz. $(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = 0$

(Rolle) $g(b) = g(a) \Rightarrow \exists y \in (a,b) : g'(y) = 0$; wir setzen $\xi = y$

$g(b) \neq g(a) \Rightarrow g'(\xi) = 0;$

$$0 = (g(b) - g(a))\, f'(\xi) \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

$\alpha)$ $g(a) = g(b)$,

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a))\, \underbrace{g'(\xi)}_{=0} = 0 = \underbrace{(g(b) - g(a))}_{=0}\, f'(\xi)$$

$\beta)$ $g(a) \neq g(b)$

$$F(x) = f(x) - (f(b) - f(a))\, \frac{g(x) - g(a)}{\underbrace{g(b) - g(a)}_{\neq 0}}$$

vom MWS Beispiel

$$F(a) = F(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : F'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) - (f(b) - f(a))\, \frac{g'(\xi)}{g(b) - g(a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))$$

\o/

14) $f(x) = \ln(1 + 1/x)$; $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\underbrace{x(x+1)}_{= x^2 + x}} \quad (\Rightarrow x \neq -1)$$

$$f''(x) = +\frac{1}{x^2(x+1)^2} \cdot (2x+1) = \frac{2}{\underbrace{x^2(x+1)^2}_{>0}} \underbrace{(x + 1/2)}_{>0} \quad (x \neq -1/2)$$

f ist streng monoton fallend und konvex

$\Rightarrow$ RP bei $x \to 0$ untersuchen

5) ges: $c \geq 0$ c maximal

$x, y, z > 0 \wedge x + y + z = 1$

$$c \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

$$\ln c \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

$$3\sqrt[3]{\ln(1 + 1/x) \cdot \ln(1 + 1/y) \cdot \ln(1 + 1/z)} = \ln c$$

Gleichheit wenn $\ln(1 + x^{-1}) = \ln(1 + y^{-1}) = \ln(1 + z^{-1})$

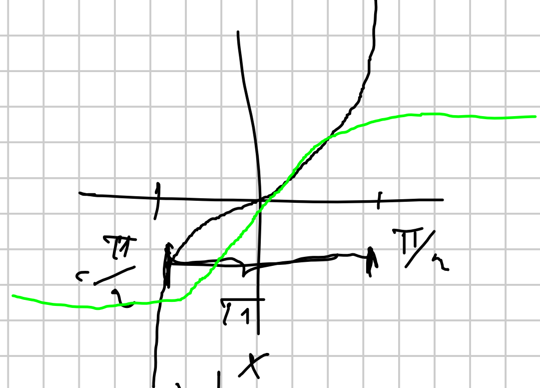
d.h. $x = y = z$, also $x = y = z = 1/3$

$$3\sqrt[3]{(\ln 4)^3} = 3 \ln 4$$

$$e^{3 \ln 4} = 4^3 < (1 + x^{-1})(1 + y^{-1})(1 + z^{-1})$$

4. Integrale:

1)
$$F(x) = \int_0^x \frac{5}{100 - 99\sin(t)}\,dt =$$



$$= \frac{10}{\sqrt{199}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{199}}\left(100\tan\left(\frac{t}{2}\right) - 99\right)\right)\Bigg|_{t=0}^{x}$$

Problem bei $\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ wenn $\frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k+1}{2}\pi$

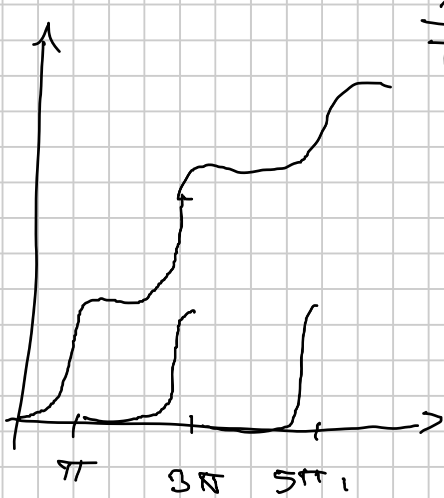
$$t = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Wie groß ist der Sprung jeweils?

$$\lim_{x \to \pi\downarrow} F(x) - \lim_{x \to \pi\uparrow} F(x) = \frac{10}{\sqrt{199}}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{10\pi}{\sqrt{199}}$$

Wir müssen alle Sprungstellen verkleben:

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \frac{10\pi}{\sqrt{199}} \cdot \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor - F(0)$$



$F(x) = \tilde{F}(x) - \tilde{F}(0)$

wobei $\tilde{F}$ eine Stammfunktion auf I ist.

$\tilde{F}(x)$ hat keine Sprünge

2) a)

$$\int_0^x \arctan(t)\,dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

b)

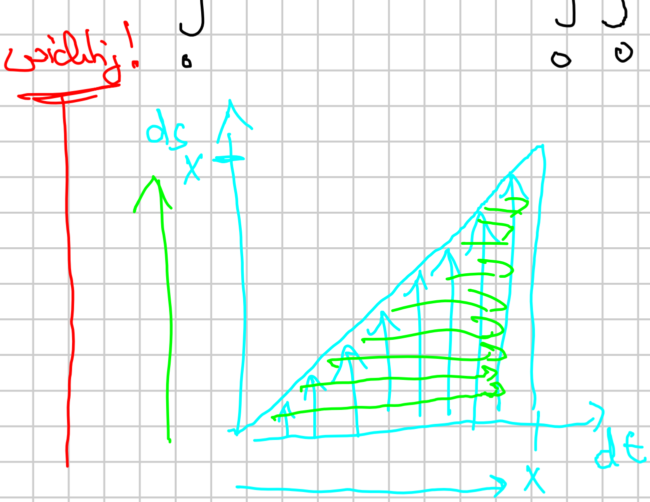
$$\arctan(t) = \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\,ds \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$[0,t]$ ist Kompakt

$$\int_0^x \arctan(t)\,dt = \int_0^x\int_0^t \frac{1}{1+s^2}\,ds\,dt \overset{\downarrow}{=} \int_0^x\int_s^x \frac{1}{1+s^2}\,dt\,ds$$

$t \in [0;x]$

wichtig!



$$= \int_0^x \left[\frac{1}{1+s^2}t\right]_{t=s}^{x} ds =$$

$$= \int_0^x \frac{x}{1+s^2} - \frac{s}{1+s^2}\,ds =$$

$$= x\underbrace{\int_0^x \frac{1}{1+s^2}\,ds}_{\arctan(x)} - \int_0^x \frac{s}{1+s^2}\,ds = x\arctan x - \frac{1}{2}\int_1^{1+x^2}\frac{1}{u}\,du =$$

$u := 1+s^2 \quad \Big| \quad \frac{du}{2s} = ds$

$\frac{du}{ds} = 2s$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

\o/

3)
$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt \quad \text{(Hauptsatz)}$$

$$= \int_a^b f'(t)\cdot 1\,dt \quad \text{(Mittelwertsatz der I.)}$$

$\xi\in(a,b)$
$$\rightarrow \;= f'(\xi)\int_a^b 1\,dt = f'(\xi)(b-a)$$

oder: $\exists\, \xi\in(a,b):\; f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(\xi)$

mit $g(x)=x$ (M. der Diffr.)

4)
$$f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 \Rightarrow f'(x)=2\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)e^{-x^2}$$

$$g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \Rightarrow g'(x)=\int_0^1 -\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}(1+t^2)\,2x\,dt=$$

Diff. unter's Int. Ziehen

$$=-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt=-2x\int_0^1 e^{-x^2}\cdot e^{-x^2t^2}\,dt=$$

$$=-2x\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt\cdot e^{-x^2}=-2\int_0^x e^{-u^2}\,du\;e^{-x^2}$$

$u:=xt$

$\frac{du}{dt}=x \Leftrightarrow \frac{du}{x}=dt$

$$f'(x) = -g'(x) \Rightarrow (f+g)' = 0 \Rightarrow f+g = \text{const}$$

$x = 0$ ist ein schöner Wert:

$$f(0) = 0 \; ; \; g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \frac{\pi}{4}$$

b) immer an Stetigkeit denken

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(e^{-x}) = h(\lim_{x\to\infty} e^{-x}) = h(0) =$$

$$h(x) = \int_0^1 \frac{x^{1+t^2}}{1+t^2}\,dt$$ ist stetig, da diffbar nach Hauptsatz

$$= \int_0^1 \frac{0^{1+t^2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

$1+t^2 > 1$, $0^k = 0 \; (k \neq 0)$

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\lim_{x\to\infty} f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} - g(x)\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

c) Damit $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$.

5)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

zu zeigen $f(x)$ konvergiert majorisiert, denn

$f(x) = E(x)$ konvergiert majorisiert und absolut nach dem Wurzelkriterium

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \right]_{t=0}^{x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{0^{k+1}}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - \frac{0^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1 =$$

$t^0 - 0^0 = 1 - 1 = 0$

$$= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$$

6) f ist konvex $\Rightarrow$ Tangente an x verläuft unterhalb des Graphen ab x.
(in $[x,\infty)$)

$$\int_x^\infty f(x)\,dx \geq \frac{1}{2} f(x)\,\delta$$

Tangente an $(x, f(x))$:

$$t(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x} - x)$$

$$t(\tilde{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x)(\tilde{x} - x) = -f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{x} - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \delta = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

also: $\boxed{\int_x^\infty f(t)\,dt \geq -\frac{f^2(x)}{2f'(x)}}$

$$\Rightarrow \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt \geq -\frac{(e^{-x^2})^2}{2e^{-x^2}\cdot(-2x)} = +\frac{e^{-2x^2}}{4x\,e^{-x^2}} = \frac{1}{4x\,e^{x^2}}$$

7) $\int_x^b e^{-t^2}\,dt \le \int_x^b \frac{t}{x} e^{-t^2}\,dt = \int_{-x^2}^{-b^2} \frac{1}{-2x} e^{+u}\,du =$

Bez?

$u = -t^2$

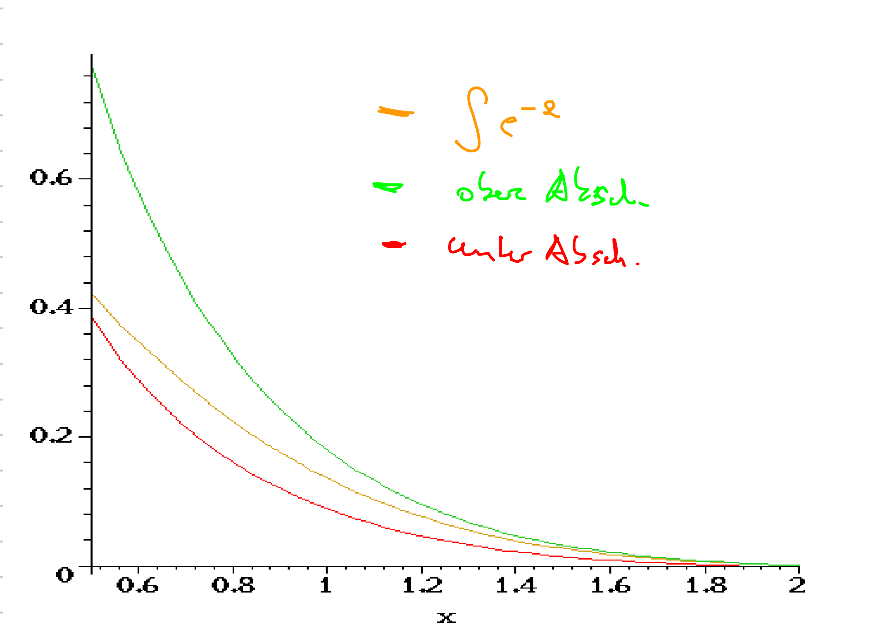
$du = -2t\,dt$

$\frac{du}{-2t} = dt$

$= -\frac{1}{2x} \int_{-x^2}^{-b^2} e^u\,du = -\frac{1}{2x}\left[e^u\right]_{u=-x^2}^{-b^2} = -\frac{1}{2x}\left[e^{-b^2} - e^{-x^2}\right]$

$= \frac{e^{-x^2} - e^{-b^2}}{2x}$

$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx \le \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-x^2} - \overbrace{e^{-b^2}}^{\to 0}}{2x} = \frac{e^{-x^2}}{2x} = \frac{1}{2x e^{x^2}} =: 2.$ Absch. un



$1 \le t/x \Leftrightarrow e^{-t^2} \le \frac{t}{x} e^{-t^2} \Rightarrow \int_a^b e^{-t^2}\,dt \le \int_a^b \frac{t}{x} e^{-t^2}\,dt$

$\sum_{k=\lfloor x \rfloor}^{\infty} e^{-k^2} < \infty$, da $a_{k>0}$ $\frac{e^{-(k+1)^2}}{e^{-k^2}} < 1 \Leftrightarrow e^{-(k+1)^2} < e^{-k^2} \Leftrightarrow -(k+1)^2 < -k^2$

$\Leftrightarrow k+1 > k \Leftrightarrow$ true

$\Rightarrow$ (Integralkriterium) $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$ konvergiert

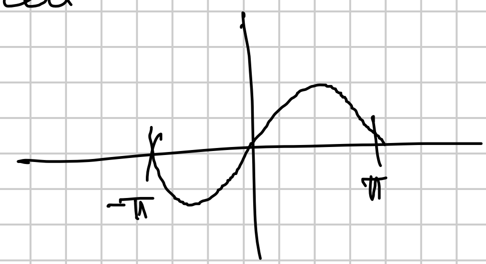
8)

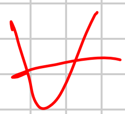
$$\int_a^b \sin(t^2)\,dt = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$$

$u = t^2$

$du = 2t\,dt$

$\frac{du}{2t} = dt$





8) (2P)

k^{-s} ist streng monoton fallend für $s > 1$

$$\frac{d}{dk} k^{-s} = \underset{>0}{-s} \cdot \underset{>0}{k^{1-s}} < 0$$

$\Rightarrow$ wir können die Reihe durch

$$0 \le \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=m}^{n} k^{-s} - \int_{m}^{n+1} k^{-s}\, dk \right) \le k^{-m}$$

$$\downarrow$$

$$0 \le \sum_{k=m}^{\infty} k^{-s} - \int_{m}^{\infty} k^{-s}\, dk \le k^{-m}$$

abschätzen mit $\int_{m}^{\infty} k^{-s}\, dk = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{k^{1-s}}{1-s} \right]_{k=m}^{k=b} =$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\underbrace{\frac{b^{1-s}}{1-s}}_{\to 0} + \frac{m^{1-s}}{s-1} \right) = \frac{m^{1-s}}{s-1}$$

also: $\sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} \le \zeta(s) - \frac{m^{1-s}}{s-1} \le \sum_{k=1}^{m} k^{-s}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + \frac{m^{1-s}}{s-1} \le \zeta(s) \le \sum_{k=1}^{m} + \frac{m^{1-s}}{s-1}$$

$s=3$: ges. m mit $m^{-3} < 10^{-5}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^3} < \frac{1}{10^5}$$

$$\Leftrightarrow 10^5 < m^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{10^5} < m$$

$$10^{5/3} = 10 \cdot 10^{2/3} \leq 47$$

also $m = 47$

$$\Rightarrow \zeta(3) = \sum_{k=1}^{46} k^{-3} + \frac{47^{-2}}{2} \approx 1{,}20205\ldots$$

9) ges: ? in

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2/n} = ? + O(1) \quad (n \to \infty)$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{n}} - \int_0^{\infty} e^{-\frac{k^2}{n}} dk \leq e^{-\frac{0}{n}} = e^0 = 1$$

$\sum_k e^{-k^2/n}$ wird durch $\sum_k e^{-k^2}$ majorisiert, welches wegen dem Integralkriterium konvergiert, da $\int_0^{\infty} e^{-k^2} dk < \infty$ und e^{-k^2} monoton fällt.

$\Rightarrow$ entsprechend konvergiert auch $\int_0^{\infty} e^{-k^2/n} dk$

$$\int^{x} e^{-t^2/n} dt \underset{\uparrow}{=} \sqrt{n} \int^{\frac{x}{\sqrt{n}}} e^{-u^2} du$$

$u = \frac{t}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}\, du = dt$

$$\Rightarrow \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-t^2/n} dt = \lim_{b \to \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{b}{\sqrt{n}}} e^{-u^2} du = \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi n}$$

$$-1 \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2/n} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2/n} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi n} \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2/n} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi n} = O(1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2/n} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi n} + O(1)$$

10) $Q_n = \prod_{k=1}^{n} k^k$

ges: ? in $\ln Q_n = ? + O(n \ln n) \quad (n \to \infty)$

$$\ln Q_n = \ln \prod_{k=1}^{n} k^k = \sum_{k=1}^{n} k \ln k$$

$$f(x) = x \ln x$$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 > 0 \quad \text{für} \quad x > e^{-1}$$

Wir suchen eine Abschätzung für $\sum_{k=1}^{n} k \ln k$

$f'(x)$ ist monoton wachsend für $x \geq 1$

$$\Rightarrow \int_1^n x \ln x \, dx \leq \sum_{k=2}^{n} k \ln k \leq \int_2^{n+1} x \ln x \, dx$$

$$\int^x t \ln t \, dt = \frac{x^2}{2} \ln x - \underbrace{\int^x \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} \, dt}_{= \int^x \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_{x=1}^{n} \leq \sum_{k=0}^{n} k \ln k \leq \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_{x=2}^{n+1}$$

$$\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} - \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{4} \leq \sum_{k=0}^{n} k \ln k \leq \frac{(n+1)^2}{2} \ln(n+1) - \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{4}{2} \ln 4 + 1$$

$$\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \leq \sum_{k=0}^{n} k \ln k \leq \underbrace{\frac{(n+1)^2}{2} \ln(n+1) - \frac{(n+1)^2}{4} - 2 \ln 2 + 1}$$

$$\frac{n^2+2n+1}{2}\ln(n+1)-\frac{n^2+2n+1}{4}-2\ln 2+1$$

$$=\frac{n^2}{2}\ln(n+1)-\frac{n^2}{4}+O(n\ln n)$$

11) $s \in \mathbb{R}$ höchstwahrscheinlich falsch

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (\ln k)^s}$

$$f(x) = \frac{1}{k \cdot (\ln k)^s} = k^{-1} (\ln k)^{-s}$$

$$f'(x) = -k^{-2} (\ln k)^{-s} + k^{-1} \cdot (-s) (\ln k)^{-s-1} \cdot \frac{1}{k} =$$

$$= \underbrace{-k^{-2}}_{>0} \left(\underbrace{(\ln k)^{-s}}_{>0} + \underbrace{s (\ln k)^{-s-1}}_{\text{kommt auf } s \text{ an}} \right)$$

$$(*) = \frac{1}{(\ln k)^s} + s \frac{1}{(\ln k)^{s+1}} \overset{\geq}{\underset{<}{=}} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\ln k)^s} \overset{\geq}{\underset{<}{=}} -s \frac{1}{(\ln k)^{s+1}} \quad \Big| \cdot (\ln k)^{s+1} > 0 \ (\text{für } k > e)$$

0,1931)

$k \geq 3$

$$\Leftrightarrow -\ln k \overset{<}{\underset{>}{=}} s$$

konvergiert die Reihe ab $k = 3$, dann auch hier $k = 2$ ...

$\Rightarrow (*) > 0$ wenn $-\ln k < s \Rightarrow s > 0$

ansonsten hilft das Integralkriterium nicht weiter

$$\int^{x} \frac{1}{k \ln k} \, dk \underset{\substack{\uparrow \\ u = \ln k \\ du = \frac{1}{k} dk \\ k\,du = dk}}{=} \int^{\ln x} \frac{1}{u} \, dk = \ln \ln k$$

13) $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$ $\quad > - <$

$$f'(x) = -\frac{\ln x - x \cdot 1/x}{x^2} = -\frac{\ln x - 1}{x^2}$$

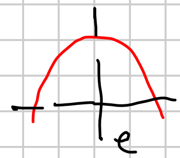
$$\ln x - 1 \overset{<}{\underset{>}{=}} 0 \iff \ln x \overset{>}{\underset{<}{=}} 1 \iff x \overset{>}{\underset{<}{=}} e$$

$x < e \Rightarrow \quad f'(x) > 0$ vorher wachsend

$x = e \Rightarrow \quad f'(x) = e$ Maximum ~~Minimum~~ bei $x = e$

$x > e \Rightarrow \quad f'(x) < 0$ nachher fallend

$f(e) = e^{-1} \cdot \ln e = e^{-1}$



$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{1 - \ln x}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

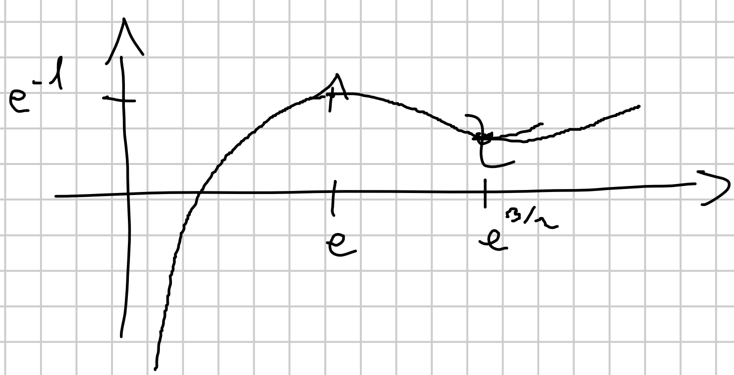
$$2 \ln x - 3 \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \iff \ln x \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{3}{2} \iff x \overset{>}{\underset{<}{=}} e^{3/2}$$

also:

$x < e^{3/2} \Rightarrow f''(x) < 0$ konkav

$x = e^{3/2} \Rightarrow f''(x) = 0$ WP

$x > e^{3/2} \Rightarrow f''(x) > 0$ konvex



b) $\tau_n = 1^{1/1} \cdot 2^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdots n^{1/n}$; $n \in \mathbb{N}$

$$\ln \tau_n = \ln \prod_{i=1}^{n} i^{1/i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln i}{i}$$

Für $i \geq 3$ ist $\frac{\ln i}{i}$ monoton fallend, also

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=3}^{n} f(k) - \int_3^{n+1} f(k)\,dk \right) \leq f(3)$$

$$\int^x \frac{\ln t}{t}\,dt \overset{\uparrow}{=} \int^{\ln x} u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]^{\ln x} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$u = \ln t$

$du = \frac{1}{t}dt$

$t\,du = dt$

$$\int_3^{n+1} f(k)\,dk = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{x=3}^{n+1} = \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$$

$$\int_2^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=3}^{n} f(k) \geq \int_3^{n+1} f(x)\,dx$$

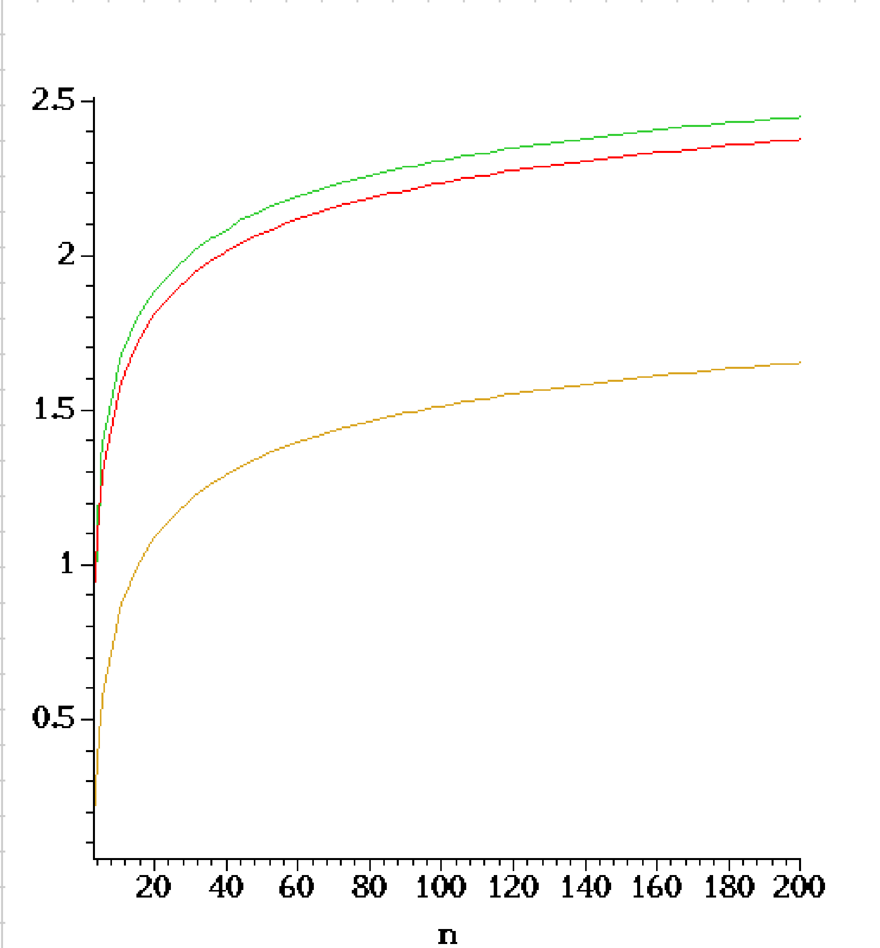
$$1 + \sqrt{2} + \int_3^{n+1} f(x)\,dx \leq \ln \tau_n \leq 1 + \sqrt{2} + \int_2^{n} f(x)\,dx$$

c)
$$\frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} \geq \sum_{k=3}^{n} f(k) \geq \frac{(\ln n+1)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$$

$$\frac{(\ln n)^2}{2} + O(1) \geq \ln \tau_n \geq \frac{(\ln n + O(1/n))^2}{2} + O(1) =$$

$$= \frac{(\ln n)^2}{2} + O(1)$$

12)



$$f(k) = \frac{1}{k \ln k} \quad \text{fällt monoton}$$

Einschließung

Kapitel V

1) $q(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n}$; $\underbrace{p(x) = (x-x_0)^n q(x)}$; $q(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow q(x) = \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} \quad (x \neq x_0)$$

$q(x)$ ist stetig $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = q(x_0)$

(stetig fortsetzbar durch $q(x_0)$)

$$q(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{p'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{p^{(n)}(x)}{n!} = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \underbrace{(x-x_0)^{n-1}\left(n\,q(x) + (x-x_0)\,q'(x)\right)}$$

$$\left(\begin{array}{l} p'(x) = n(x-x_0)^{n-1} q(x) + (x-x_0)^n q'(x) \\ \Rightarrow p'(x_0) = 0 + 0 = 0 \mid \text{analog für } p''(x) \dots p^{(n-1)}(x) \end{array} \right)$$

also: $q(x_0) = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$

b) $p'(x_0) = p''(x_0) = \dots = p^{(n-1)}(x_0) = 0$

siehe () oben mit $p''(x) = \left((x-x_0)^{n-1} \hat{q}(x)\right)' = (p'(x))'$

2. x ist analytisch in $x=0$, $\sin x$ ist analytisch in $x=0$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \underbrace{1}_{\neq 0} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ist analytisch

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{x}{\sin x} \text{ ist auch analytisch}$$

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 < \left|\frac{x}{2}\right| < \pi$ $\qquad$ $\left|\frac{x}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$

$0 < |x| < 2\pi$ $\qquad$ $|x| < \pi$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{x}{2}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^k(4^k-1)B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}\right) =$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = x^{2k-1} \cdot \frac{2}{4^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(4^k-1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \cdot \frac{2}{x}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(4^k-1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

$$= \underbrace{(-1)^0 \frac{1}{1} x^0}_{} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(4^k-2)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k}}_{k=0} =$$

$$(-1)^{k} \frac{(-1)}{1} \cdot 1 \cdot x^{2\cdot 0} = 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(4^k-2)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k}$$

3)

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k \qquad (|x|<1)$$

bei der Substitution aufpassen!

$$x := -t^2 \implies (1-t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-t^2)^k \qquad (|t|<1)$$

$$|-t^2| = t^2 < 1$$

$$\iff |t| < 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} (-1)^k t^{2k}$$

Also:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \binom{2k}{k} \int_0^x t^{2k}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x|<1)$$

4)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx e$$

Wir wissen:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} - \frac{7e}{n^3} + O(n^{-4})$$

$$= e - \frac{e}{2n} + O(n^{-2})$$

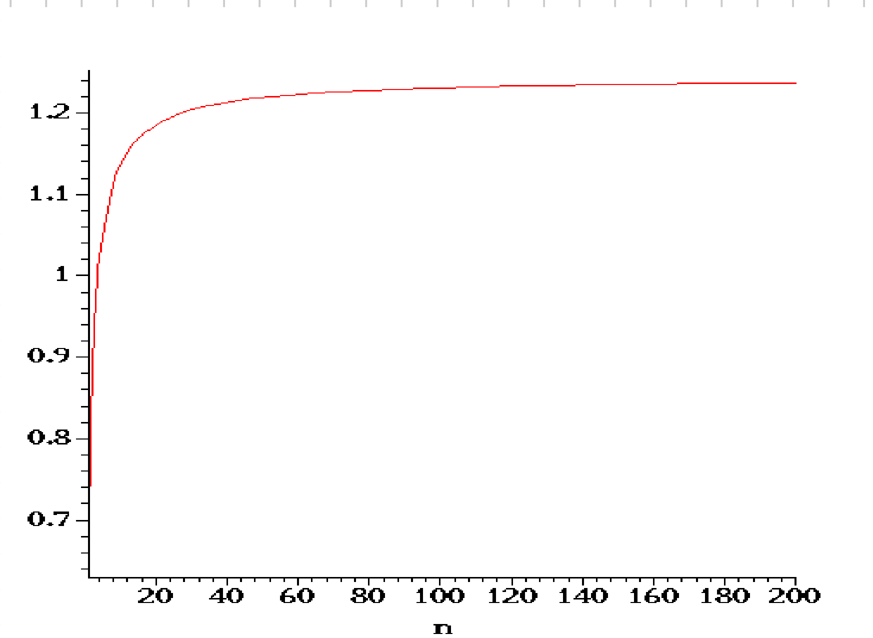
$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e + \frac{e}{2n}\right| \leq c\,n^{-2} \Leftrightarrow n^2\left|\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n - e + \frac{e}{2n}\right| \leq c$$

Für kleine n ist der Fehler am größten: $(n=1)$

$$\left|(1+1)^1 - e + \frac{e}{2}\right| = \left|2 - \frac{e}{2}\right| \approx 0{,}641 = c$$

$$\Rightarrow \quad \left|e + \frac{e}{2n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| < c\,n^{-2}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{e}{2n} - cn^{-2} \leq e \leq \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n - \frac{e}{2n} + cn^{-2}$$



5) Übung Logarithmus! Additionstheorem! $\longrightarrow = -\frac{2ix(1-ix)}{1+x^2} = -\frac{2ix+2x^2}{1+x^2}$

6)
$$\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+ix-2ix}{1+ix}\right) = \frac{i}{2}\ln\left(1-\frac{2ix}{1+ix}\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}\left(-\frac{2ix}{1+ix}\right)^{k+1} = \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1} = \dots$$

$$\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right) = \frac{i}{2}\ln(1-ix) - \frac{i}{2}\ln(1+ix) =$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-ix)^{k+1}}{k+1} - \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(ix)^{k+1}}{k+1} =$$

Reihenumordnung

$$= \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}\cdot\left((-ix)^{k+1}-(ix)^{k+1}\right) = \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k}\cdot\frac{1}{2k+1}\left((-ix)^{2k+1}-(ix)^{2k+1}\right)$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)}\left((-ix)^{2k+2}-(ix)^{2k+2}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(-(-1)^k\cdot i x^{2k+1} - (-1)^k i x^{2k+1}\right) + \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+2}\underbrace{\left((-1)^{k+1}x^{2k+2} - (-1)^{k+1}x^{2k+2}\right)}_{=0}}_{=\circledast}$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}\,i\,x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

7)

8)

a)

```
> convert((1-x)^(-2)/(1+x),parfrac);
                    1             1             1
          - ---------- + ----------- + ---------
            4 (-1 + x)             2   4 (1 + x)
                         2 (-1 + x)
```

also: $$f(x) = \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x}$$

b)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(1+(-x)\right)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-1)^k x^k$$

$$\binom{-2}{k} = \frac{(-2)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k (2+k-1)\cdots(2+1)\cdot 2}{k!} = (-1)^k \frac{(k+1)^{\underline{k}}}{k!} =$$

$$= (-1)^k \binom{k+1}{k} = (-1)^k (k+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot x^k$$

c) $$f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(k+1) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot (-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}(k+1) + \frac{1}{4}\left((-1)^k + 1\right)\right)}_{a_k} x^k \Rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{k+1}{2} & \text{für } 2 \nmid k \\ \frac{k}{2} + 1 & \text{für } 2 \mid k \end{cases}$$

$= \lceil \frac{k}{2} \rceil = \lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$

$= \lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$

9)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot H_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) H_{k+1} x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) H_{k+1} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) H_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

$$=$$

1) $y'(x) = f(x)\, g(y(x))$; $y(x_0) = y_0$

$g(y_0) = 0 \Rightarrow y'(x_0) = f(x_0) \cdot 0 = 0$

Eine mögliche Lösung lautet: $y(x) = y_0$,

d.h. $y'(x) = 0$

Satz von Picard und Lindelöf:
ist g nach jedem Parameter/nach jeder Komponente stetig diff'bar, so ist die Lsg. eindeutig.

2) $y'(x) = \underbrace{(\alpha - \beta y(x))\, y(x)}_{=: g(y(x))}$; $y(0) = y_0 > 0$, $\alpha, \beta > 0$

a)

$g(y)$ ist stetig diff'bar nach y.

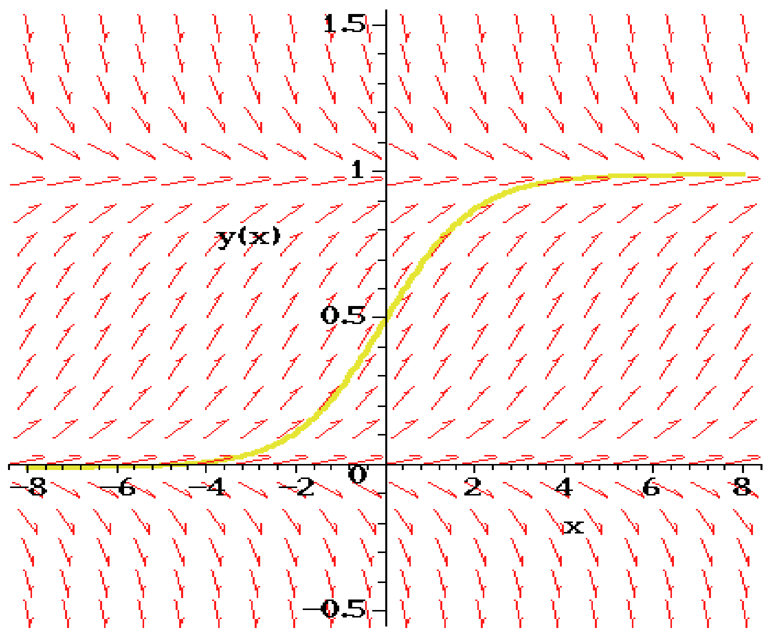
$\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit (Satz von Lindelöf)

$$\frac{y'(x)}{(\alpha - \beta y(x))\, y(x)} = 1 \Leftrightarrow \int_0^x \frac{y'(x)}{(\alpha - \beta y(x))\, y(x)}\, dx \underset{s = y(x)}{=} \int_0^x 1\, dt$$

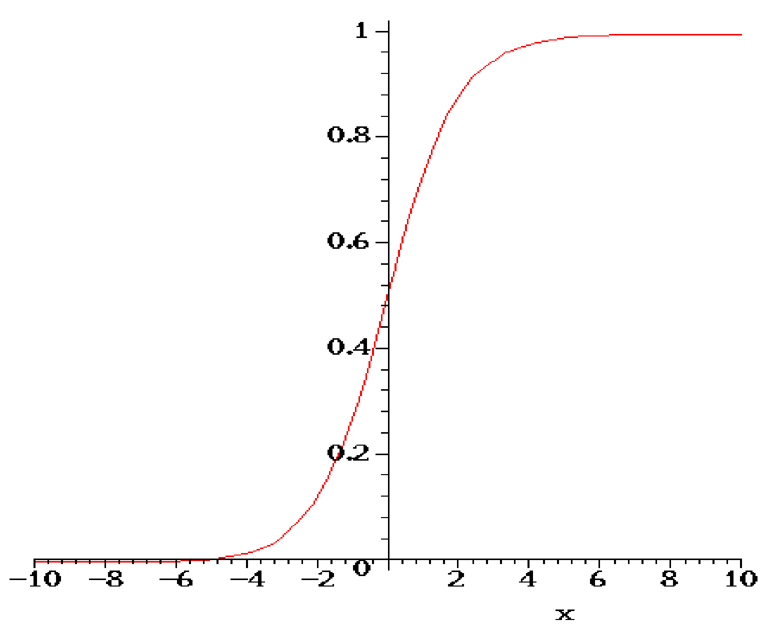
$$\frac{ds}{y'(x)} = dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{(\alpha - \beta s)s}\, ds = x$$

```
> int(1/(a-b*s)/s,s);
                     ln(-a + b s)   ln(s)
                   - ------------ + -----
                          a           a
```



1.5
1
y(x)
0.5
0
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
x
−0.5



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
x

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{(\alpha-\beta s)s}\,ds = \left[\frac{\ln(s)}{\alpha} - \frac{\ln(\beta s-\alpha)}{\alpha}\right]_{s=y_0}^{y(x)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{y(x)}{\beta y(x)-\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{y_0}{\beta y_0-\alpha}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y(x)}{\beta y(x)-\alpha}\right) = \alpha x + \ln\left(\frac{y_0}{\beta y_0-\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y(x)}{\beta y(x)-\alpha} = \overbrace{e^{\alpha x}\cdot\frac{y_0}{\beta y_0-\alpha}}^{C} = \frac{1}{\beta - \frac{\alpha}{y(x)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{\alpha x}\cdot\frac{y_0}{\beta y_0-\alpha}\left(\beta y(x)-\alpha\right)$$

$$\beta - \frac{\alpha}{y(x)} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{\alpha}{y(x)} = \beta - \frac{1}{C}$$

$$y(x) = \frac{\alpha}{\beta - \frac{1}{C}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)\left(1 - \beta \quad\right) = -\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{\alpha e^{\alpha x}\frac{y_0}{\beta y_0-\alpha}}{\beta e^{\alpha x}\frac{y_0}{\beta y_0-\alpha} - 1} = \frac{\alpha}{\cancel{1}\,\beta - \frac{\beta y_0-\alpha}{e^{\alpha x}\,y_0}}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\beta - \frac{\beta y_0-\alpha}{e^{\alpha x}y_0}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

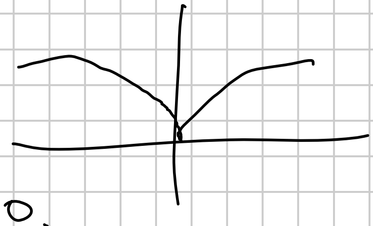
$\to 0$

∞, da $\alpha > 0$

Die Lösung hat keine Singularität

c) streng monoton wachsend, keine Extrema

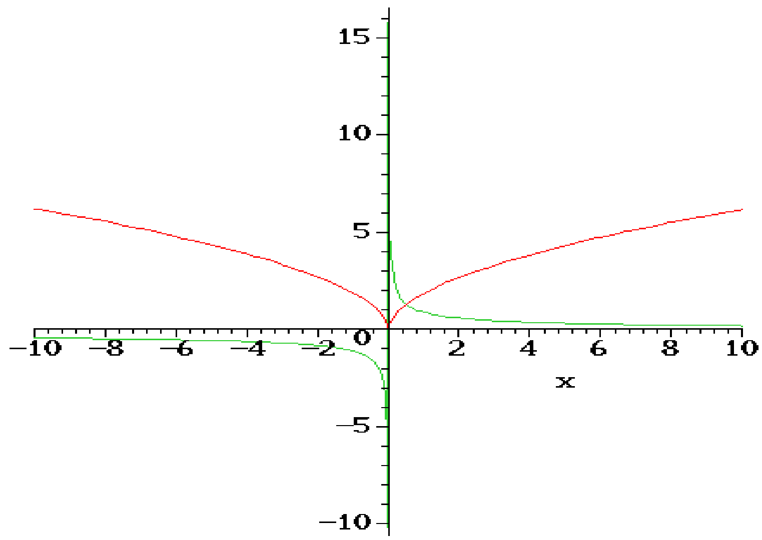
3) $y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}$, $y(0) = 0$



$\Rightarrow \quad f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$

$\partial_2 f(x,y)$ ist nicht stetig in $y = 0$.

$\Rightarrow$ Satz von Lindelöf gilt hier nicht



4) a) $f(x) = 0$

$I = \mathbb{R}$

überall stetig

b) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow I = (-\infty, 1)$

5)

$$y''(x) = \omega^2 y(x) \; ; \quad y(0) = 0 \; ; \; y'(0) = 1$$

$$y''(x) - \omega^2 y(x) = 0$$

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - \omega^2 e^{\lambda x} = (\lambda^2 - \omega^2) \underbrace{e^{\lambda x}}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \omega^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm |\omega|$$

$$y(x) = a_1 e^{|\omega| x} + a_2 e^{-|\omega| x}$$

$$y(0) = a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_2$$

$$y'(0) = a_1 |\omega| - a_2 |\omega| = 1$$

$$a_1 |\omega| + a_1 |\omega| = 1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2|\omega|}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2|\omega|}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^{|\omega| x} - e^{-|\omega| x}}{2|\omega|} = \frac{\sinh(|\omega| x)}{|\omega|}$$

6)

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0 \; ; \; y(0) = c \; ; \; y'(0) = d$$

$$y(x) = e^x$$

$$\underline{\underline{1 = e^0 = c = d}}$$

$$e^x (1 + a + b) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + a + b = 0$$

$$b = -1 - a$$

$$\Rightarrow a \in \mathbb{R} \; ; \; b = -1 - a \; ; \; c = d = 1$$

7) $y_1'(x) = y_1(x)\,(y_2(x) - 1)\ ,\ y_1(0) = e$

$y_2'(x) = y_2(x)(1 - y_1(x))\ ,\ y_2(0) = 1/e$

$y_1 + y_2 - \ln(y_1 y_2) = e + 1/e$

Ableiten nach x:

$$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 - \frac{1}{y_1 y_2} \cdot (\dot{y}_1 y_2 + y_1 \dot{y}_2) = 0$$

Einsetzen:

$$y_1(y_2 - 1) + y_2(1 - y_1) - \frac{y_1(y_2 - 1) y_2 + y_1 y_2 (1 - y_1)}{y_1 y_2} =$$

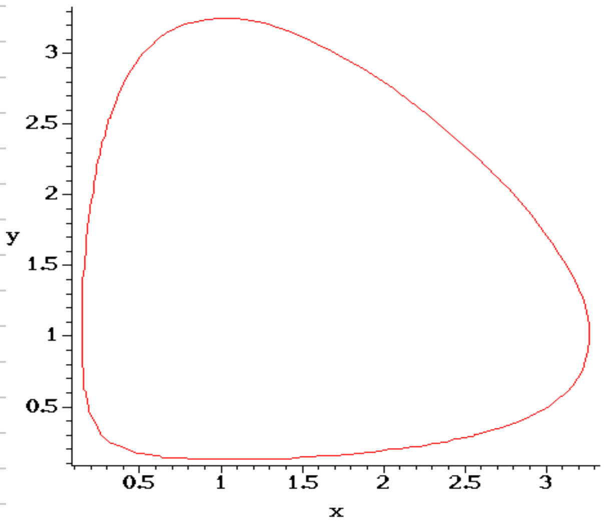
$$= y_1(y_2 - 1) + y_2(1 - y_1) - y_2 + 1 - 1 + y_1 =$$

$$= y_1 y_2 - y_1 + y_2 - y_2 y_1 - y_2 + y_1 = 0$$

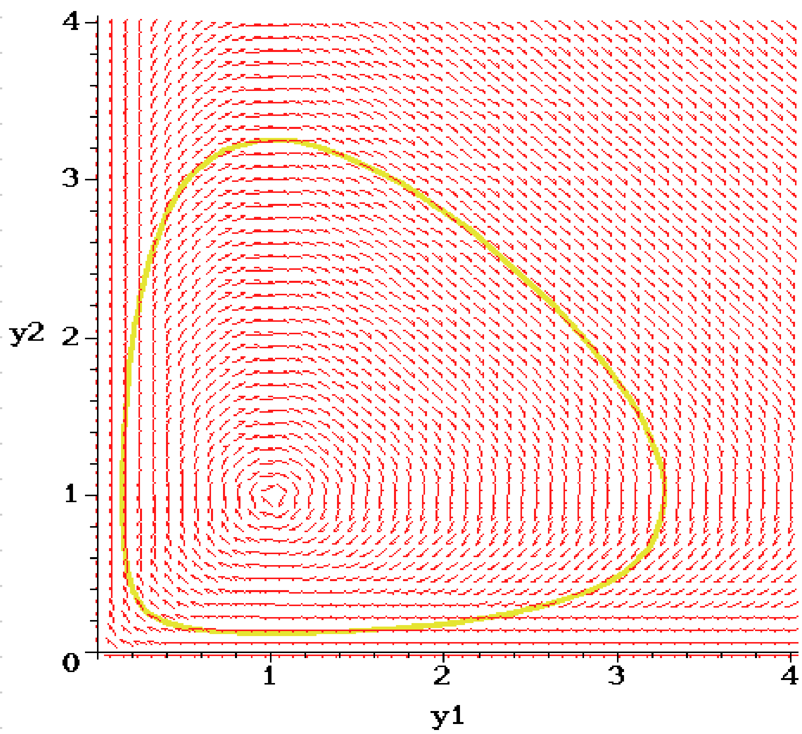
beide (y_1, y_2) sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$

die Gleichung ist auch überall definiert

Es gibt nur dann einen Fixpunkt, wenn $y_1 = 0 \vee y_2 = 0$, dass ist nur der Fall, wenn $y_1(0) = 0 \vee y_2(0) = 0$



implicitplot({exp(x) * exp(y)* exp(-exp(1))*exp(-(1/exp(1))) = x*y}, x = 0..4, y = 0..4);



phaseportrait([diff(y1(x),x) = y1(x)*(y2(x)-1), diff(y2(x),x) = y2(x) * (1-y1(x))],[y1(x),y2(x)],x=0..10,[[y1(0)=exp(1),y2(0)=exp(-1)]],y1=0..a,y2=0..a,stepsize=.05,dirgrid=[50,50]);

8)

$$y'(x) = x^2 + y(x)^2 \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$a_0 = 1$$

$$y^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} x^k$$

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

$$\Rightarrow \quad a_{k+1} = \frac{1}{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} + [k=2] \cdot 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_k = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j a_{k-j-1} + [k=3] \cdot 1 \right)$$

$$\hat{a}_k = k! \, a_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\hat{a}_k}{k!} = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\hat{a}_j}{j!} \frac{\hat{a}_{k-j-1}}{(k-j-1)!} + [k=3] \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{a}_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \hat{a}_j \hat{a}_{k-j-1} + [k=3] (k-1)!$$

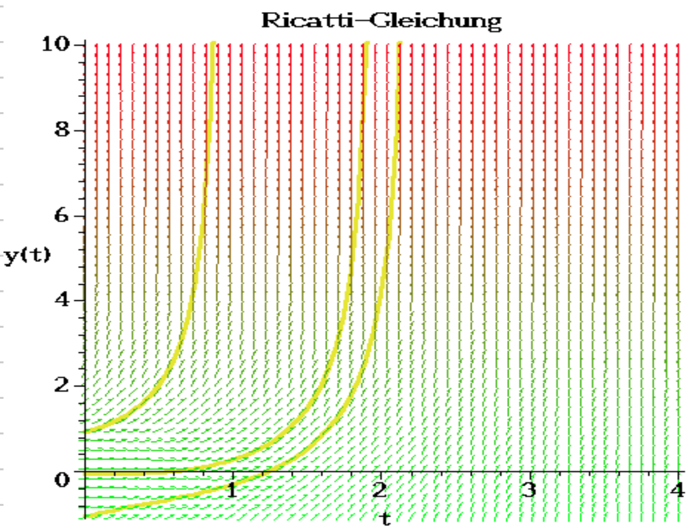
5) $\binom{k-1}{j} \in \mathbb{N}$; $[k=3] \cdot (k-1)!$ auch

Rest durch Induktion ...

$\checkmark$

c) Fleißarbeit... Wie sieht's mit der Fehlerabschätzung aus?

d)




```
phaseportrait([diff(y(t),t)= t^2 + y(t)^2],y(t),t=-0..4, [[y(0) = 0] , [y(0) = 1] , [y(0) = -1]],y=-1..10,
title=`Ricatti-Gleichung`, color=[.3*y(t),(1-y(t)),.1],dirgrid=[50,50],stepsize=0.05);
```

Es gilt: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \Rightarrow a_k = f^{(k)}(0)$

Wo ist der Blow up?

$k!$ $>_c$

Bei 0.9 ca?

$\boxed{\frac{a_k}{k!} \approx O(r^{-k})}$

Also: $|a_k| = a_k \approx O(0.9^{-100})$

$(n \to \infty)$

hier:

Falsche Eingabe in Maple... numeric zeigt Blowup auf

Blow-Up bei .96981062

3)

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)\, f(y) \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) + f(0)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = f(0) + f(0)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -f(0) = f(0)^2 \quad |: f(0) \quad \text{oder} \quad f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 = f(0)$$

also: $f(0) = 0 \ \vee \ f(0) = -1$

$$\frac{d}{dx} f(x+y) = f'(x+y) = f'(x) + f'(x) \cdot f(y)$$

$$f'(x+y) = f'(x)\,(1 + f(y))$$

wichtig

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) + f(x)\, f(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = f(0)\,(1 + f(x)) \quad |: f(0) \ \vee\ f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 1 + f(x) \Leftrightarrow -1 = f(x)$$

$\Rightarrow$ $f(x) = -1$ konstant oder $f(0) = 0$:-)

$(-1 = -1 - 1 + (-1)(-1) \checkmark)$

$$f(x-x) = 0 = f(x) + f(-x) + f(-x)\, f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad -f(x) = f(-x)\,(1 + f(x)) \quad |: 1 + f(x), \text{ da } \exists x: f(x) \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{f(x)}{1 + f(x)} = f(-x)$$

$$f'(x+y) = f'(x)\,(1 + f(y))$$

$$f'(x-x) = f'(0) = f'(x)\,(1+f(-x)) \Leftrightarrow$$

$$f'(0) = f'(x)\left(1 - \frac{f(x)}{1+f(x)}\right) =$$

$$\alpha := $$

$$= f'(x)\left(\frac{1+f(x)-f(x)}{1+f(x)}\right) = f'(x)\,\frac{1}{1+f(x)}$$

$$\alpha = \frac{f'(x)}{1+f(x)}$$

$$\alpha x = \int_0^x \alpha\, ds = \int_0^x \frac{f'(t)}{1+f(t)}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^{f(x)} \frac{1}{1+s}\,ds = \ln(1+f(x))$$

$$s = f(t)$$
$$ds = f'(t)\,dt$$

$$\alpha x = \ln(1+f(x))$$

$$e^{\alpha x} = 1 + f(x)$$

$$f(x) = e^{\alpha x} - 1 = \int_0^{\alpha x} e^x\,dx$$

10)

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 f(x) f(y) \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

$$f(x+0) + f(x-0) = 2 f(x) f(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2 f(x) f(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(0) = 0 \quad \vee \quad f(x) = 0 \text{ konstant}$$

Probe: $0 + 0 = 2 \cdot 0 \cdot 0$ ($f(x) = 0$ ist Lösung)

als gilt $f \neq 0 \wedge f(0) = 0$

(*) $$f'(x+y) + f'(x-y) = 2 f'(x) f(y)$$

$y := -x$

$$2 f'(0) = 2 f'(x) f(-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(0)}{f'(x)} = f(-x) \qquad (f' \neq 0, \text{ da } f \text{ nicht konst}$$

($f(0)$ ist immer Ableitbar)

bzw: $$f(x) = \frac{f'(0)}{f'(-x)}$$

$$2 f'(0) = 2 f'(0) f(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \text{ sowohl } f(0) = 0 = f'(0)$$

* (nach y ableiten):

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 2 f'(x) f'(y)$$

* [illegible]

$$f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(x)f'(y)$$

Kapitel 7)

$(n \to \infty)$

1) $$1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + O(?)\right)$$

$O(g(x))$

$$= 1 + \frac{2}{n} + O(g(x)) + O\left(\frac{g(x)}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{n} + O(g(x))$$

$$\Rightarrow g(x) = n^{-2}$$

b) $$\exp\left(\left(1 + O(n^{-1})\right)^2\right) = e + O(g(x))$$

$$e^{1+x} = e + O(x) \qquad (x \to 0)$$

$n^{-1} \to 0$ wenn $n \to \infty$

$$\left(1 + O(n^{-1})\right)^2 = 1 + 2O(n^{-1}) - O(n^{-1})^2 = 1 + O(n^{-1})$$

$$\exp\left(\left(1 + O(n^{-1})\right)^2\right) = \exp\left(1 + O(n^{-1})\right) = e + O(n^{-1})$$

c) $$\underbrace{\left(n + 2 + O(n^{-1})\right)^n} = g(x)\left(1 + O(n^{-1})\right) = g(x) + g(x)O(n^{-1})$$

$$= n^n\left(1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2})\right)^n = n^n\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + O(n^{-2})\right)\right)^n =$$

$$= n^n\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 + O(n^{-2})\right)^n}_{1 + O(n^{-2}) + {}_nO(n^{-2})^2 + \dots = 1 + O(n^{-1})} = (n+2)^n\left(1 + O(n^{-1})\right)$$

2)

$$x_n^2 - \ln x_n = n$$

$$x_n - \frac{\ln x_n}{x_n} = \frac{n}{x_n}$$

$$x_n = \frac{n}{x_n} + \frac{\ln x_n}{x_n}$$

Klausur 07/08 (23.08)

1)

$$f(x) = \ln(\ln x) + \ln(x) + 1 + \frac{1}{1-x}$$

a) wg. $\ln x \Rightarrow x > 0$

$\ln(\ln x) \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$

$1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\Rightarrow$ auf $(1, \infty)$ ist f stetig diff'bar

b) ges: $g(x) = \ldots + O(?)$

mit $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln(\ln x) + \ln x + 1 + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{0}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln x + \underbrace{\ln(\ln x) + 1}_{O(\ln(\ln x))}}$$

also: $f(x) \simeq \ln x + O(\ln(\ln x)) \quad (x \to \infty)$

a) (23:13)

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

Wir wissen (S. 107) $\sin x < x$ $(x \geq 0)$

also $\sin \frac{x}{k} < \frac{x}{k}$ $\left(\frac{x}{k} \geq 0\right)$

$$\frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{x}{k} \qquad \left|\frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leq \frac{1}{k} \ldots >\_<$$

konvergiert nicht

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k^2} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2x$$

$\Rightarrow$ $H(x)$ konvergiert punktweise für $x \geq 0$

$$|\sin x| \leq |x| \quad \forall x$$

also: $\frac{1}{k} \left|\sin\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leq \frac{|x|}{k^2}$

$$\sum_k \frac{|x|}{k^2} \leq 2|x|$$

$\Rightarrow$ $H(x)$ konvergiert punktweise $\forall x$.

b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \frac{1}{k} = \sum_{k=1} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\left|\frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| = \frac{1}{k^2} \left|\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leq \frac{1}{k^2} \cdot 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$ konv. majorisiert $\forall x$

$\Rightarrow$ $H'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$

Aufgabe 3) (23:29)

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

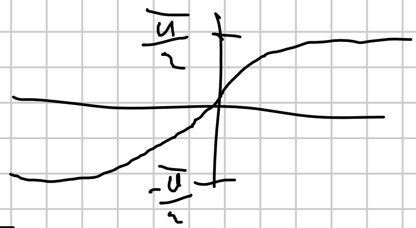
$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow$ $f(x) = \text{konst. auf } (-\infty, 0) \text{ bzw } (0, +\infty)$

Fall $x > 0$:

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$



$$\lim_{x \to \infty} \left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

Fall $x < 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & : x < 0 \end{cases}$$

4) (23:35)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (|x| < r)$$

$$x \cdot f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \qquad (|x| < r)$$

$$x \cdot f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k \qquad (|x| < \min(r, \infty) = r)$$

$\uparrow$

($g(x) = x$ ist K-Radius ∞)

$\Rightarrow A_0 = 0$

$k \geq 1 \quad A_k = k \cdot a_k$

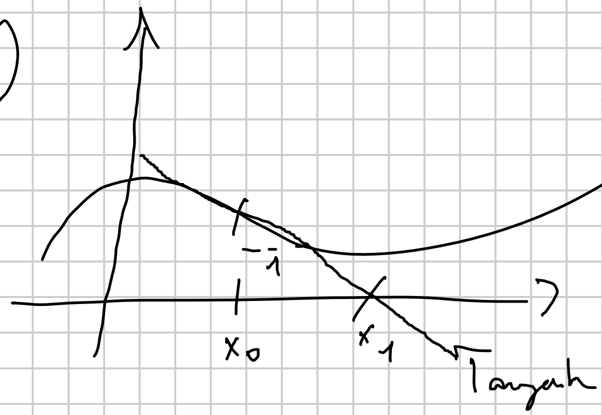
$R = r$

5) (23:40)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diff'bar

ges: <u>Tangente</u> von $f(x)$ in $x_0\in\mathbb{R}$ und Schnittpunkt x_1 der Tangente mit x-Achse

a)



b) $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$t(x_1) = 0$ (ges. x_1 mit $(x_1, 0 = f(x))$)

$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (f'(x_0) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \text{für } f'(x_0) \neq 0$$

Fall: $f'(x_0) = 0$: $f(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ das ist entweder erfüllt oder nicht

wenn erfüllt dann $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig

ansonsten ex. x_1 nicht.

c) siehe b)

$f(x_0) = 0 \Rightarrow x_1$ existiert

$f(x_0) \neq 0 \wedge f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_1$ ex. nicht

$\wedge\ f(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_1$ ex.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$x_1 = x_0$, wenn $f(x_0) = 0$

$x_1 > x_0$, wenn $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0$, also: 2 Möglichkeiten ...

$<$ auch 2 Möglichkeiten

$\vdots$

6) (23:50)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \approx ?$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x \ln x)^2} \cdot \left(x \frac{1}{x} + \ln x \right)$$

$$= -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ fällt streng monoton für $1 + \ln x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x > -1$

$\Leftrightarrow x > e^{-1}$

$\Leftarrow x \geq 2$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{k=2}^{n} f(k) - \int_{2}^{n+1} f(k)\, dk \right) \leq f(2)$$

$$\int^{x} \frac{1}{k \ln k}\, dk \underset{\substack{u = \ln k \\ du = \frac{1}{k} dk}}{=} \int^{\ln x} \frac{1}{u}\, du = \left[\ln(\ln u) \right]^{u=x}$$

$$0 \leq \underbrace{\lim_{k \to \infty} \left(\sum_{k=2}^{n} f(k) - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln 2) \right)}_{=: \gamma} \leq \frac{1}{2 \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(2)) \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \ldots + \gamma$$

$n \to \infty$

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \approx \ln(\ln(n+1))$$

7) (00:03)

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \qquad (x>0,\ y>0)$$

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) + f(1)$$

$$\underline{\underline{0 = f(1)}}$$

$$f'(x \cdot y) \cdot y = f'(x)$$

$$f'(1) \cdot \frac{1}{x} = f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x} = \frac{\alpha}{x} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int_1^x f'(x)\,dx = \int_1^x \frac{\alpha}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) - f(1) = f(x) = \alpha \ln(x) - \alpha \ln(1) = \alpha \ln x$$

also: $f(x \cdot y) = \alpha \cdot (\ln x + \ln y) = \alpha \ln x + \alpha \ln y$
$= f(x) + f(y)$

✓

(00:16)

Wdh-Klausur (00:18)

1) $f(x) = \arctan \frac{x}{1+x} + \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

a) $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{1+x - x\cdot 1}{(1+x)^2} + e^{-1/x^2} \cdot 2x^{-3}$$

$x \neq 0, \; x \neq -1$ Behandeln Sie, bei 0!

$(-1, \infty)$

$\Rightarrow I = (0, \infty)$

b) $$f(1/x) = \arctan \frac{1/x}{1+1/x} + \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \arctan \frac{1}{1+x} + \exp(-x^2)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 1 - x + O(x^2)$$

$$\arctan \frac{1}{1+x} = (1 - x + O(x^2)) - (1 - x + O(x^2))^3 + O(x^2)$$

$$= 1 - x + O(x^2) - 1 + x -$$

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\arctan\left(\frac{1/x}{1+1/x}\right) + \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\arctan(\cancel{0}\,1) + \exp(0)} =$$

$\frac{1/x}{1+1/x} \to \frac{0}{1} = 0$, $\quad \frac{1}{x^2} \to 0$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{\pi}{4} + 1} \Rightarrow f(x) \simeq 1 + \frac{\pi}{4} + O(x^{-1})$$

2) (60:55)

(a_k) mit $a_k > 0$ und $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ und

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$$

$\frac{a_k}{1+a_k} \geq \frac{a_k}{1+1} = \frac{a_k}{2}$ ab einem k

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

$\Longrightarrow$ dann auch $\sum_k \frac{a_k}{a_k+1}$

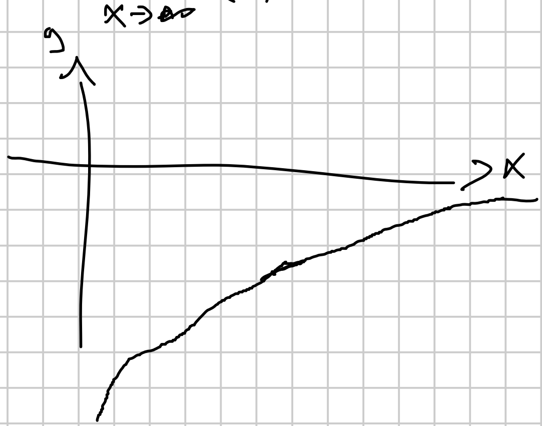
3) (60:58)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f'(x) > 0$

$\Rightarrow f$ streng monoton steigend

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

a)



b) $f(x) = -e^{-x}$

c) $f(x) < 0$, denn gäbe es ein x mit $f(x) > 0$, dann $f(x+h) > f(x) > 0$ ⚡ zum Grenzwert

7) (1:01)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (|x|<r)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

$$g(x) = 1 - x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

$$A_k = \frac{1}{b_0}\left(a_k - \sum_{j=0}^{k-1} A_j b_{k-j}\right) = \frac{1}{b_0}\left(a_k - \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j} b_{j+1}\right) =$$

$$\underset{k \geq 1}{=} \frac{1}{1}\left(a_k - A_{k-1} b_1\right) = a_k + A_{k-1} = \sum_{j=0}^{k} a_k$$

$$A_0 = a_0$$

$$A_k = \sum_{j=0}^{k} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_k x^k \qquad (|x| < \min(r, 1))$$

$$\frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1)$$

5) $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Extrema/ Monotonie	fällt	Minimum	steigt
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Krümmung	links	TP	links

$\Rightarrow$ immer konvex

5) Jensen'sche Ungleichung

$f(x) = x^4$ ist streng konvex (2. Ableitung hat nur endlich viele NS)

also:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leq \frac{x^4 + y^4}{2}$$

Gleichheit gdw. $x = y$

6) 1:21

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{k^2 \ln k}_{= f(k)}$$

$$f'(k) = 2k \ln k + \frac{k^2}{k} = 2k \ln k + k =$$

$$= k(2\ln k + 1)$$

$$k > 0; \quad 2\ln k + 1 > 0 \Leftrightarrow 2\ln k > -1$$

$$\Leftrightarrow \ln k > -1/2 \Leftrightarrow k > \frac{1}{\sqrt{e^1}}$$

$$1 > \frac{1}{\sqrt{e^1}}$$

$\Rightarrow$ für $k \geq 1 \Rightarrow f(k)$ ist monoton steigend

$$\Rightarrow \int_{\phi}^{n} f(k)\,dk \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_{2}^{n+1} f(k)\,dk$$

$$\frac{n^3}{3}\ln n - \frac{n^3}{9} + \frac{1}{9} \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \frac{(n+1)^3}{3}\ln(n+1) - \frac{(n+1)^3}{9} - \frac{8}{3}\ln 2 + \frac{8}{9}$$

$$1^2 \cdot \ln 1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 \ln k \simeq \frac{n^3}{3}\ln n - \frac{n^3}{9}$$

Seit wann O-Terme bei $\simeq$?

7) 1:34

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)\cdot f(y) \quad ; x,y \in \mathbb{R}$$

$$f(x+0) = f(x) + f(0) - f(x) f(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = f(0)(1 - f(x)) \quad \Big| : (1-f(x)).$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = f(0) \quad \vee \quad (1 = f(x) \ \forall x)$$

Probe:

$$f(x+y) = 1 = 1+1-1 = f(x)+f(y)-f(x)f(y)$$

✓

Ab jetzt: $0 = f(0) \wedge f \neq 1$

$$f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) - f(x)f(-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad -f(x) = f(-x)(1-f(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{f(x)}{1-f(x)} = f(-x)$$

$$f'(x+y) = f'(x) - f'(x) f(y) = f'(x)(1-f(y))$$

$$\alpha := f'(0) = f'(x-x) = f'(x)(1 - f'(-x)) =$$

$$= f'(x)\left(1 + \frac{f(x)}{1-f(x)}\right) =$$

$$= f'(x) \frac{1}{1-f(x)}$$

$$\alpha x = \int_0^x \alpha \, dt = \int_0^x \frac{f'(t)}{1-f(t)} \, dt = \int_0^{f(x)} \frac{1}{1-u} \, du = \Big[\ln(1-u) \Big]_{u=0}^{f(x)}$$

$u = f(t)$

$du = f'(t)\,dt$

$$\alpha x = -\ln(1 - f(x)) + \underbrace{\ln 1}_{=0}$$

$$e^{\alpha x} = \frac{1}{1 - f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - f(x) = \frac{1}{e^{\alpha x}} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{e^{\alpha x}} = \frac{e^{\alpha x} - 1}{e^{\alpha x}} \; ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Probe:

$$f(x+y) = 1 - \frac{1}{e^{\alpha(x+y)}} = 1 - \frac{1}{e^{\alpha x} \cdot e^{\alpha y}}$$

$$f(x) + f(y) - f(x)f(y) = 1 - \frac{1}{e^{\alpha x}} + 1 - \frac{1}{e^{\alpha y}} - \left(1 - \frac{1}{e^{\alpha x}} - \frac{1}{e^{\alpha y}} + \frac{1}{e^{\alpha x} e^{\alpha y}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{e^{\alpha(x+y)}} = f(x+y)$$

also entweder $f(x) = 1 \vee f(x) = 1 - \frac{1}{e^{\alpha x}}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

1:47